

Die Wahl der Variablen bei der Formulierung von Stoffgesetzen der mikropolaren Plastizität

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)**

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Dimitrios Makridis

aus Athen/Griechenland

Hauptreferent:

Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis

Korreferent:

Prof. Dr. rer. nat. M. Lazar

Tag der Einreichung:

24.09.2009

Tag der mündlichen Prüfung:

04.12.2009

Darmstadt 2009

D 17

Vorwort

An erster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis danken, für die Anregung zu dieser Arbeit, seine in jeder Hinsicht großzügige Unterstützung, die stets geduldige und hervorragende wissenschaftliche Betreuung und natürlich auch für die Übernahme des Hauptreferates.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. M. Lazar für das Interesse an dieser Arbeit und für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Für das ausgezeichnete Arbeitsklima und die tatkräftige Unterstützung sowie für die Hilfsbereitschaft möchte ich mich bei allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Kontinuumsmechanik, insbesondere bei Daniel Johannsen und Mario Wessel recht herzlich bedanken. Mein besonderer Dank gilt außerdem Herrn Dr. rer. nat. habil. P. Grammenoudis und Herrn Dr.-Ing. C. Bröse für die Hilfsbereitschaft und großzügige Unterstützung sowohl bei Fragen theoretischer Natur als auch bei rechentechnischen Schwierigkeiten.

Darmstadt, Dezember 2009

Dimitrios Makridis

Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung einer mikropolaren Plastizitätstheorie für finite Deformationen, die kinematische und isotrope Verfestigung berücksichtigt. Charakteristische Eigenschaften der Theorie sind die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und des mikropolaren Rotationstensors in entsprechende elastische und plastische Anteile. Mittels differentialgeometrischer Konzepte (relative kovariante Ableitung) erfolgt die Definition geeigneter kinematischer Variablen. Die Theorie enthält ein mikropolares Krümmungsmaß in der Momentankonfiguration, das einem räumlichen Gradienten entspricht. Das Elastizitätsgesetz wird vom Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet. Außerdem wird für die Definition der Fließfunktion ein Spannungstensor verwendet, der auf dem Mandelschen Spannungstensor im Rahmen der klassischen (nichtpolaren) Plastizität basiert. Das Fließgesetz wird von dem Postulat von Il'iusin hergeleitet, welches für mikropolare Kontinua angemessen formuliert wird. Die Verfestigungseigenschaften werden in die freie Energie und die Fließfunktion einbezogen, wobei die entsprechenden Evolutionsgleichungen als hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der sogenannten inneren Dissipationsungleichung hergeleitet werden. Auf diese Weise wird für die erarbeiteten mikropolaren Plastizitätsgesetze die thermodynamische Konsistenz gesichert.

Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte konstitutive Modell umgesetzt, um beliebige mechanische Strukturen als Anfangsrandwertprobleme betrachten zu können. Dazu werden die schwache Formulierung des Gleichgewichts für mikropolares Materialverhalten und die konsistente Linearisierung der schwachen Form aus der starken Form des quasistatischen Randwertproblems hergeleitet. Auf der Basis dieser Grundgleichungen erfolgt die Beschreibung der Methode der finiten Elemente mittels Einführung einer Diskretisierung und einer isoparametrischen Interpolation. Bei der Integration der Gleichungen findet das Operator-Split-Verfahren Anwendung. Aus den Gleichungen auf Elementebene werden die globalen Gleichungen assembliert und in einer globalen Gleichgewichtssiteration gelöst. Die Finite-Elemente-Methode kann auf beliebige Elementformulierungen angewandt werden. Hier wird ein eigenständig entwickeltes dreidimensionales 8-Knoten-Volumenelement mit Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden betrachtet. Dieses Element wird über die Benutzerschnittstelle UEL in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert.

Die Finite-Elemente-Berechnungen am Beispiel der Torsion eines Vollzylinders demonstrieren, dass das hier entwickelte mikropolare Plastizitätsmodell in der Lage ist, Längenskaleneffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Die berechneten Ergebnisse werden qualitativ sowohl mit experimentellen Resultaten als auch mit den numerischen Resultaten einer mikropolaren Plastizitätstheorie verglichen, die ein mikropolares Krümmungsmaß enthält, das einem räumlichen Gradienten in der Bezugskonfiguration entspricht.

Abstract

A finite deformation micropolar plasticity theory exhibiting kinematic and isotropic hardening is developed. Characteristic features of the theory are the multiplicative decomposition of the deformation gradient and the micropolar rotation tensor into elastic and plastic parts, respectively. We employ relative covariant derivatives via differential geometry concepts in order to introduce adequate kinematical variables. The theory incorporates a micropolar curvature quantity in the actual configuration, which accords to a spatial gradient. The elasticity law is derived from the second law of thermodynamics in the form of the Clausius-Duhem-inequality. Also, in defining the yield function use is made of a stress tensor, which corresponds to the Mandel stress tensor within the framework of classical (nonpolar) plasticity. The flow rule is obtained from the postulate of Il'iusin, which is formulated appropriately for micropolar continua. The hardening properties are incorporated in the free energy and the yield function, the associated evolution equations being derived as sufficient conditions for the validity of the so-called internal dissipation inequality. This way, the established micropolar plasticity laws are thermodynamically consistent.

In order to be able to regard arbitrary mechanical structures as initial boundary value problems, the developed constitutive model together with the related field equations have to be integrated numerically. In this work this happens with the help of the finite element method. From the strong form of the quasi-static boundary value problem the weak formulation of the equilibrium for micropolar material behavior and a consistent linearization are derived. On the basis of these principal equations the description of the finite element method takes place by means of an introduction of a discretization and an isoparametric interpolation. For integration of the equations an operator split procedure was used. From the equations on element level the global equations are assembled and solved in a global equilibrium iteration. The finite element method can be applied to arbitrary element formulations. Here a three-dimensional 8-node-volume element with translational and rotational degrees of freedom is developed and implemented into the commercial finite element program ABAQUS.

Finite element calculations in the case of the torsion of a solid cylinder show that the developed micropolar plasticity theory is able to describe length scale effects in the material behavior. The predicted results are compared qualitatively with experimental results as well as with the numerical results of a micropolar plasticity theory, that incorporates a micropolar curvature quantity, which accords to a spatial gradient in the reference configuration.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Längenabhängigkeiten im Materialverhalten – Gegenstand der Arbeit	1
1.2	Zielsetzung	3
1.3	Nomenklatur	3
2	Grundlagen aus der Tensoranalysis und der Differentialgeometrie	7
2.1	Holonome und anholonome Basissysteme - Basiswechsel	7
2.2	Kovariante Ableitung - Zusammenhang - Objekte der Anholonomie	10
2.3	Richtungsableitung, Levi-Civita-Zusammenhang	15
2.4	Lie-Klammer	18
2.5	Der Torsionstensor	20
2.6	Darstellungsformeln für die Objekte des Zusammenhangs	22
2.7	Der Riemannsche Krümmungstensor	23
2.8	Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit	27
3	Mikropolares Kontinuum - Grundlagen der Kinematik	29
3.1	Physikalische Motivation	29
3.2	Bezugs- und Momentankonfiguration	29
3.3	Makro- und Mikrodeformationsgradient	31
3.4	Differentialoperatoren	35
3.4.1	Koordinaten-Systeme	35
3.4.2	Relativer Gradient	36
3.4.3	Kovariante Ableitungen in Verbindung zu inkompatiblen Deformationen .	40
4	Bilanzgleichungen des mikropolaren Kontinuums	45
4.1	Massenbilanz	45
4.2	Bilanzgleichung für Impuls und Drehimpuls	46
4.3	Bilanzgleichung für die mechanische Leistung	47
5	Mikropolare Verzerrungs- und Spannungstensoren	49
5.1	Invarianz der freien Energie bei überlagerten Starrkörperrotationen auf die Mo- mentankonfiguration	49
5.2	Geometrische Interpretationen mittels skalarwertigen Differenzen	51
5.2.1	Die Differenz Δ_s	51
5.2.2	Die Differenz Δ_c	52
5.3	Zweistufige mikropolare Krümmungstensoren	54

5.4	Geschwindigkeiten zugeordnet zu den mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren	56
5.5	Spannungstensoren und zugeordnete Geschwindigkeiten	59
6	Zerlegung der Deformation	61
6.1	Zwischenkonfiguration	61
6.2	Additive Zerlegung der mikropolaren Verzerrungstensoren	63
6.3	Additive Zerlegung von Δ_c	65
6.3.1	Additive Zerlegung der dreistufigen mikropolaren Krümmungstensoren	65
6.3.2	Additive Zerlegung der zweistufigen mikropolaren Krümmungstensoren	67
6.3.3	Der Sonderfall $\hat{\Lambda}_{ki}^j = (\bar{\mathbf{R}}_e)^j{}_q \frac{\partial (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})^q{}_i}{\partial x^k}$	68
6.4	Spannungstensoren	69
7	Thermodynamischer Rahmen	71
7.1	Elastizitätsgesetze-Dissipationsungleichung	71
7.2	Postulat von Il'iusin-Fließregeln für Plastizität	75
7.3	Verfestigung	80
7.3.1	Kinematische Verfestigung	80
7.3.2	Isotrope Verfestigung	83
8	Das Gesamtmodell	87
8.1	Lineare Stoffgesetze - von Mises Fließfunktion	87
8.2	Zusammenfassung des Modells relativ zu \hat{R}_t	88
8.3	Kleine elastische Verzerrungen - Zusammenfassung des Modells relativ zu R_t	91
9	Finite-Elemente-Formulierung des mikropolaren Kontinuums	95
9.1	Darstellung des quasistatischen Randwertproblems	95
9.1.1	Starke Formulierung des quasistatischen Randwertproblems	96
9.1.2	Schwache Formulierung des quasistatischen Randwertproblems	97
9.1.3	Räumliche Diskretisierung des quasistatischen Randwertproblems	99
9.2	Numerische Lösung des quasistatischen Randwertproblems	102
9.2.1	Updated-Lagrange-Methode	102
9.2.2	Konsistente Linearisierung	103
9.2.3	Integration der Materialgleichungen – Operator-Split-Verfahren	109
9.2.4	Bestimmung der konsistenten Tangente	113
9.3	Implementierung in ABAQUS	115
10	Finite-Elemente-Beispiele	117
10.1	Torsion und einachsiger Zug an dünnen Drähten	117
10.2	Wahl der Materialparameter	119
10.3	Torsion eines Kreiszylinders	121
10.3.1	Diskussion und Interpretation der Ergebnisse	121
11	Zusammenfassung und Ausblick	131
A	Zerlegung der kinematischen mikropolaren Größen	135

1 Einführung

1.1 Längenabhängigkeiten im Materialverhalten – Gegenstand der Arbeit

In einem klassischen Kontinuum werden jedem Punkt eines materiellen Körpers ein Ortsvektor und eine Massendichte zugeordnet. Für ein hinreichend stetig differenzierbares Feld von Ortsvektoren berechnet man daraus einen Deformationsgradient für jeden Punkt. Aus dem Deformationsgradient bildet man für jeden Punkt einen Spannungstensor. Dieser ist symmetrisch und ergibt sich als konstitutives Funktional des Deformationsgradienten und des Anfangszustandes des betrachteten Punktes. Der Deformationsgradient benachbarter Punkte des Kontinuums spielt keine Rolle. Daher bezeichnet man solche Theorien auch als lokal. Zeitunabhängige lokale Theorien können keine Längenskaleneffekte im Materialverhalten beschreiben, die z.B. bei Proben mit sehr kleinen Dimensionen präsent sind. Das bekannteste Beispiel solcher Längenskaleneffekte sind die Torsionsexperimente von FLECK ET AL. [35] an dünnen Drähten. In der Tat wurde ermittelt, dass kleinere Proben ein steiferes Verhalten zeigen. Diese Unterschiede werden kleiner mit zunehmendem Durchmesser und vernachlässigbar klein für hinreichend grosse Proben. Eine Möglichkeit, Längenskaleneffekte zu erfassen, besteht in sogenannten Kontinua mit Mikrostruktur, die nicht klassische Kontinua darstellen.

Mikropolare und mikromorphe Materialmodelle sind Kontinua mit einer sehr einfachen Mikrostruktur. Bei einem mikropolaren Kontinuum wird jedem materiellen Punkt eine Mikrostruktur in Form eines starren Körpers zugeordnet. Die Bewegung eines starren Körpers kann vollständig mit Hilfe eines körperfesten Dreibeins erfasst werden. Dies war auch der Ansatz der Gebrüder COSSERAT [21], die zum ersten Mal eine solche Theorie einführten. Eine komplette Formulierung aller Bilanzgleichungen wurde später von ERINGEN [31] - [34] unter dem Namen mikropolare Kontinua gegeben. Wird jedem Punkt eine Mikrostruktur in Form eines homogen deformierbaren Körpers zugeordnet, so heißt der materielle Körper mikromorphes Kontinuum. Die Rotation bzw. die Deformation des Mikrokontinuums sind relevante Größen für das mikropolare bzw. mikromorphe Kontinuum. Deren räumliche Gradienten kommen in den konstitutiven Gleichungen vor und ermöglichen die Beschreibung von Längenskaleneffekten.

Die theoretische Beschreibung von Längenabhängigkeiten im Materialverhalten von Festkörpern hat eine interessante Geschichte. In den sechziger Jahren wurden bei elastischen Körpern im atomaren Bereich Dispersionsrelationen beobachtet, die nicht mit klassischen Elastizitätsgesetzen beschreibbar waren. MINDLIN [72] schlug vor, das Material als ein (Makro-)Kontinuum mit Mikrostruktur (Mikrokontinuum) zu erfassen. Die Mikrostruktur stellt einen deformierbaren

Körper mit homogener Deformation dar. Jedem materiellen Punkt wird eine solche Mikrostruktur zugeordnet. Der Deformationsgradient der Mikrostruktur ändert sich nur von Punkt zu Punkt. Die Theorie berücksichtigt neben dem Deformationsgradienten des Makrokontinuums den Deformationsgradienten des Mikrokontinuums und seinen Gradienten relativ zu den Ortskoordinaten des Makrokontinuums. Damit werden Längenabhängigkeiten im Elastizitätsgesetz in einer phänomenologischen Art und Weise eingeführt. Heutzutage werden solche Modellkörper als mikromorphe Kontinua bezeichnet, ein Begriff, der auf ERINGEN [31], [32] zurückgeht. Wie von MINDLIN [72] gezeigt wurde, war eine solche Theorie in der Lage, die erwähnten Dispersionsrelationen bei Wellenausbreitungsphänomenen wiederzugeben.

In den achtziger Jahren wurde intensiv die Bildung von Scherbändern diskutiert. Erreicht eine Probe nach hinreichend hoher plastischer Vordeformation eine kritische Last, so kann die weitere plastische Deformation in einem schmalen Bereich (Scherband) erfolgen. Ähnliche Verhältnisse gelten auch bei Deformationsprozessen, die mit einem Einschnürvorgang enden. In solchen Fällen konzentriert sich die gesamte plastische Deformation in einem schmalen Bereich, dessen Abmessungen von derselben Größenordnung wie typische innere Skalenlängen des Werkstoffes sind. Form, Größe und Breite eines Scherbandes hängen von den inneren Skalenlängen des Materials ab. Aber auch die Geometrie des Bauteils spielt eine wichtige Rolle wie systematische Untersuchungen in KRIEG et al. [53] zeigen. Zur Modellierung einer solchen Lokalisierung der plastischen Dehnung wurden Modelle der mikropolaren Plastizität (BESDO [6], STEINMANN [81] - [84], STEINMANN ET AL. [86], WILLAM et al. [93], DIETSCHKE ET AL. [26] - [27], VARDOULAKIS [91], DE BORST [9] - [10], DE BORST ET AL. [11], MÜHLHAUS ET AL. [68]) sowie Plastizitätstheorien mit Gradientenabhängigkeiten (MÜHLHAUS ET AL. [69], AIFANTIS [3], FRANTZISKONIS ET AL. [37]) eingesetzt.

Die oben genannten Arbeiten stellen phänomenologische Beiträge zur Erfassung von Längenskaleffekten im Materialverhalten dar, die auf die Berücksichtigung von Termen mit höheren Gradienten der Deformation basieren. Andererseits tauchen solche Gradiententerme in versetzungstheoretischen Arbeiten der Plastizität in natürlicher Weise beim Ausrechnen des Burgersvektors auf (siehe z.B. KRÖNER [55]). Es läßt sich zeigen, dass der Burgersvektor durch die Torsion des Zusammenhangs der sog. Zwischenkonfiguration ausgedrückt werden kann (s. LEE & STUMPF [63]). Vielmehr stellt diese Torsion den sog. Versetzungsdichtetensor dar und wird durch den ersten Gradienten (Rotation) der plastischen Deformation formuliert (s. KRÖNER [54]). Umrechnungen dieser Größe auf die Bezugs- bzw. Momentankonfiguration führen jeweils auf die Kontinuumsversetzungstheorie von BILBY ET AL. (s. z.B. [7]) und KONDO [52]. LEE & STUMPF beweisen diese Aussage mit Hilfe der differentialgeometrischen Theorie von NOLL [74] über materiell uniforme einfache Körper mit Inhomogenitäten. Über die Eigenschaft des Versetzungsdichtetensors und seine Bedeutung bei der Formulierung von konstitutiven Theorien kann u.a. auch in LAZAR [59], [60], STEINMANN [81] - [84], DLUZEWSKI [28], CARMELLI & GURTIN [13], CLAYTON ET AL. [18] sowie in der darin zitierten Literatur nachgelesen werden.

Zusammenfassend gilt Folgendes: Bei der Elastizität (metallischer Werkstoffe) wurden bisher Längenskalenabhängigkeiten nur im atomaren Bereich beobachtet. Im plastischen Bereich wurden solche Abhängigkeiten bei makroskopischen Proben praktisch beim Auftreten von Lokalisierungen und bei Proben mit einer kleinen Abmessung (Mikrosystemtechnik) während der

gesamten plastischen Deformation festgestellt. Es ist bekannt (siehe MALMBERG [66]), dass klassische (lokale) Theorien im Prinzip Längenskalenabhängigkeiten im Materialverhalten nicht berücksichtigen. Diese können nur mit sog. nichtlokalen Theorien, wie z.B. die oben erwähnten Gradiententheorien, angemessen beschrieben werden (s. auch ERINGEN [30]).

1.2 Zielsetzung

Die vorliegende Promotion ist einer Untersuchung der phänomenologischen mikropolaren Plastizität bei großen Deformationen gewidmet. Wie bei klassischen Theorien mit großen Deformationen gibt es im Prinzip unendlich viele Verzerrungs- und mikropolare Krümmungstensoren (nicht zu verwechseln mit dem Riemannschen Krümmungstensor) sowie zugeordnete Spannungstensoren für die Formulierung der Theorie. Zu einer systematischen Untersuchung der mikropolaren Plastizität gehört auf jeden Fall die Erkundung der Auswirkung der Formulierung möglichst einfacher Materialgleichungen mit unterschiedlichen Sätzen von Variablen und insbesondere mit unterschiedlichen mikropolaren Krümmungsmaßen. Eine mikropolare Plastizitätstheorie mit isotroper und kinematischer Verfestigung für große Deformationen wurde zuerst von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] vorgestellt. In dieser Arbeit wurde ein mikropolares Krümmungsmaß relativ zur Bezugskonfiguration benutzt, das durch eine Gradientenbildung zustandekommt. Das korrespondierende Krümmungsmaß relativ zur Momentankonfiguration wurde dann mittels Vorwärtstransformationen festgelegt, die nur die mikropolare Rotation enthalten. Auf diese Weise entstand ein Krümmungsmaß relativ zur Momentankonfiguration, welches keinem räumlichen Gradienten entspricht. In der vorliegenden Arbeit soll eine Theorie entwickelt werden, die von einem Krümmungsmaß in der Momentankonfiguration ausgeht, das einem räumlichen Gradienten entspricht. Das Krümmungsmaß relativ zur Bezugskonfiguration wird durch reine mikropolare Rotationen definiert und stellt keinen Gradienten mehr dar. Auf Grundlage dieser Transformationen werden auch passende objektive Zeitableitungen durch Betrachtung geeignet definierter skalarer Größen definiert. Sonst soll die Form der Materialgleichungen von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] beibehalten werden. Insgesamt soll die neue Theorie den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im Sinne der Clausius-Duhem Ungleichung für jeden zulässigen Prozess erfüllen (thermodynamische Konsistenz). Im Anschluss soll die erhaltene Theorie mit derjenigen von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS in Bezug auf Torsionsexperimenten verglichen werden. Dazu muss die neue Theorie in einen Finite Element Code implementiert werden.

1.3 Nomenklatur

Betrachtet werden isotherme Deformationen mit gleichförmig verteilter Temperatur. Die materielle Zeitableitung einer Größe $\varphi(t)$ wird mit $\dot{\varphi}(t)$ bezeichnet, wobei t die Zeit ist. Sehr oft wird auf eine explizite Abhängigkeit von Zeit und Ort verzichtet. Außerdem wird zur Beschreibung einer Funktion und zur Angabe des Funktionswertes an einer Stelle das selbe Symbol verwendet. Wenn jedoch mit verschiedenen Darstellungen derselben Funktion operiert wird, werden

oft unterschiedliche Symbole benutzt. Die Tensoroperationen in dieser Arbeit beziehen sich hauptsächlich auf Euklidische Vektorräume. Aus diesem Grund werden sich im Folgenden alle Bezeichnungen auf Euklidische Vektorräume beziehen. Sei \mathbb{E} ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum und $\{\mathbf{e}_i\}$ eine orthonormale Basis in \mathbb{E} . Wenn nichts anderes gesagt wird, laufen alle Indizes von 1 bis 3. Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es aus, Darstellungen der klassischen Mechanik zu benutzen, d.h. es wird zwischen \mathbb{E} und seinem dualen Raum nicht unterschieden. Dann werden Tensoren beliebiger Stufe auf \mathbb{E} als multilineare Funktionen auf \mathbb{E} betrachtet. Die folgenden Bezeichnungen beziehen sich auf Tensoren auf \mathbb{E} , können aber sinngemäß auch auf sog. Zweipunktensoren übertragen werden. Wir kennzeichnen in der Regel Vektoren und Tensoren zweiter Stufe mit fetten lateinischen oder griechischen Buchstaben. Insbesondere bezeichnet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ das innere Produkt, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ das Vektorprodukt und $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ das dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Sind \mathbf{A} und \mathbf{B} Tensoren zweiter Stufe, so stellen $\text{tr}\mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}$, \mathbf{A}^T und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ jeweils die Spur von \mathbf{A} , die Determinante von \mathbf{A} , die Transponierte von \mathbf{A} und das innere Produkt zwischen \mathbf{A} und \mathbf{B} dar. Die Euklidische Norm von \mathbf{A} wird mit $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ bezeichnet, während für die Euklidische Norm eines Vektors \mathbf{v} gilt $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Der Einheitstensor zweiter Stufe ist durch

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.1)$$

gegeben, wobei $\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j$ das Kronecker-Delta ist. Oft wird $(\mathbf{a})_i = a_i$, $(\mathbf{A})_{ij} = A_{ij}$ für die Komponenten des Vektors \mathbf{a} , des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} , usw. geschrieben. Ferner werden die Notationen $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$ für den Deviator von \mathbf{A} und $\mathbf{A}^{T-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ benutzt, wenn \mathbf{A}^{-1} existiert.

Tensoren dritter und vierter Stufe werden mit kalligraphischen fett gedruckten Buchstaben dargestellt. Seien \mathcal{K} , \mathcal{P} zwei Tensoren vierter Stufe, \mathbf{A} ein Tensor zweiter Stufe und \mathbf{v} , \mathbf{w} zwei Vektoren. Dann gilt bezüglich $\{\mathbf{e}_i\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$ und

$$\mathcal{K}\mathcal{P} = \mathcal{K}_{ijmn} \mathcal{P}_{mnkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad , \quad (1.2)$$

$$\mathcal{K}^T = \mathcal{K}_{ijkl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (1.3)$$

$$\mathcal{K}[\mathbf{A}] = \mathcal{K}_{ijmn} A_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = A_{ij} A_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \quad , \quad (\mathbf{A}^{-2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \quad , \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}[\mathbf{v}] = A_{ij} v_j \mathbf{e}_i \quad , \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{w} = v_i A_{ij} w_j \quad . \quad (1.7)$$

Daher ist für zwei Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A} , \mathbf{B} und einen Tensor vierter Stufe \mathcal{K}

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{K}[\mathbf{B}] = \mathcal{K}^T[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} \quad . \quad (1.8)$$

Der Einheitstensor vierter Stufe wird mit \mathcal{I} bezeichnet

$$\mathcal{I} = \delta_{im} \delta_{jn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad (1.9)$$

und besitzt die Eigenschaft

$$\mathcal{I} = \mathcal{E} + \mathcal{J} \quad , \quad (1.10)$$

mit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{imjn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{mj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n \quad , \quad (1.11)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_{imjn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n \quad . \quad (1.12)$$

Daher gilt für den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil eines beliebigen Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} , bezeichnet mit \mathbf{A}_S und \mathbf{A}_A

$$\mathbf{A}_S \equiv \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \boldsymbol{\mathcal{E}}[\mathbf{A}] \quad , \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A}_A \equiv \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \boldsymbol{\mathcal{J}}[\mathbf{A}] \quad , \quad (1.14)$$

während

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}[\mathbf{A}] = \mathbf{A} \quad . \quad (1.15)$$

Der Tensor vierter Stufe mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}^T \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{S}} = \delta_{jm}\delta_{in} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad (1.16)$$

wird mit $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ bezeichnet. Jeder isotrope Tensor vierter Stufe $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ besitzt die Darstellung

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = k_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + k_2 \boldsymbol{\mathcal{I}} + k_3 \boldsymbol{\mathcal{S}} \quad , \quad (1.17)$$

wobei k_1, k_2, k_3 skalare Größen sind.

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ Vektoren. Dann gilt

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) := (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} \quad , \quad (1.18)$$

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{v} := (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \otimes \mathbf{a} \quad , \quad (1.19)$$

so dass

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) = -(\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{v} \quad . \quad (1.20)$$

Weiterhin ist

$$(\mathbf{A}\mathbf{a} \times \mathbf{A}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = (\det \mathbf{A})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (1.21)$$

Sei \mathbf{W} ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe mit dem axialen Vektor \mathbf{w}

$$\mathbf{w} = \text{axl}(\mathbf{W}) \quad , \quad \mathbf{W} = \text{Spn}(\mathbf{w}) \quad (1.22)$$

oder

$$w_i = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{ijk} W_{kj} \quad , \quad W_{ij} = \epsilon_{kji} w_k \quad (1.23)$$

relativ zu der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$, wobei ϵ_{ijk} das Permutationssymbol darstellt. Einerseits ist

$$\mathbf{W}\mathbf{c} = \mathbf{w} \times \mathbf{c} \quad (1.24)$$

und andererseits kann zu jedem \mathbf{W} ein Rotationstensor \mathbf{R} zugeordnet werden durch

$$\mathbf{R} = \exp(\mathbf{W}) = \exp(\text{Spn}(\mathbf{w})) = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{\mathbf{W}^2}{2!} + \frac{\mathbf{W}^3}{3!} + \dots, \quad (1.25)$$

wobei \mathbf{w} der axiale Vektor von \mathbf{W} ist. Die Exponentialabbildung wiederum lässt sich auch in geschlossener Form angeben (Euler-Rodrigues-Formel)

$$\mathbf{R} = \cos(\|\mathbf{w}\|)\mathbf{1} + \frac{\sin(\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{w}\|}\text{Spn}(\mathbf{w}) + \frac{1 - \cos(\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{w}\|^2}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \quad (1.26)$$

Ein Tensor dritter Stufe $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ erfüllt die Beziehung

$$\mathcal{M}[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{v}] = \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{a})(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}) \quad (1.27)$$

Ist $\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ein Tensor zweiter Stufe, dann führen $\mathbf{A}\mathcal{M}$, $\mathcal{M}\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T$ auf Tensoren dritter Stufe, für die gilt

$$\mathbf{A}\mathcal{M} := \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = A_{mi}\mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{M}\mathbf{A}^T := \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_k) = \mathcal{M}_{ijk}A_{mk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T := \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k = \mathcal{M}_{ijk}A_{mj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k, \quad (1.30)$$

wobei $\mathcal{M}[\mathbf{A}]$ den Vektor

$$\mathcal{M}[\mathbf{A}] = \mathcal{M}_{ijk}A_{jk}\mathbf{e}_i \quad (1.31)$$

repräsentiert. Für einen gegebenen Tensor \mathbf{A} wird ein linearer Operator $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ eingeführt, der wie folgt auf den Raum aller Tensoren dritter Stufe wirkt:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A})[\mathcal{M}] = \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_k) \quad (1.32)$$

Für den Spezialfall $\mathcal{M} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}$, in dem \mathbf{B} und \mathbf{u} ein Tensor zweiter Stufe und ein Vektor sind, ergibt sich aus den eingeführten Definitionen

$$\mathbf{A}\mathcal{M} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{B}) \otimes \mathbf{u}, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{M}\mathbf{A}^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^T = \mathbf{B} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{u}), \quad (1.34)$$

$$\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T = (\mathbf{B}\mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{u}, \quad (1.35)$$

sowie

$$\mathcal{M}[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{v}] = \mathbf{B}[\mathbf{c}, \mathbf{b}](\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}\mathbf{b})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad (1.36)$$

In Gleichung (1.33) bedeutet $\mathbf{A}\mathbf{B}$ das Produkt $\mathbf{A}\mathbf{B} = A_{ij}\mathbf{B}_{jm}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m$. Ist \mathbf{B} antisymmetrisch mit dem zugehörigen axialen Vektor \mathbf{w}_b , so folgt für $\mathcal{M} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{u})[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{v}] &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{w}_b \times \mathbf{a})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times (\mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u}))\mathbf{v} \\ &= -(\mathbf{a} \times (\mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u}))[\mathbf{c}, \mathbf{v}] = ((\mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u}) \times \mathbf{a})[\mathbf{c}, \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (1.37)$$

2 Grundlagen aus der Tensoranalysis und der Differentialgeometrie

2.1 Holonome und anholonome Basissysteme - Basiswechsel

Die in diesem Kapitel zusammengestellten mathematischen Grundlagen entsprechen einem unveröffentlichten Manuskript von Prof. Tsakmakis [87] und können u.a. in LAUGWITZ [57], KLINGBEIL [51], SCHUTZ [77], FRANKEL [36], MISNER ET. AL. [73], SCHOUTEN [76], WILLMORE [94], MARSDEN AND HUGHES [67] nachgelesen werden. Teile dieses Kapitels sind ebenso in einer Veröffentlichung (s. GRAMMENODIS & TSAKMAKIS [40]) zu finden, die sich auch auf das Manuskript [87] bezieht.

Eine Menge \mathcal{M} (*Punktraum*) wird im wesentlichen als eine dreidimensionale *Mannigfaltigkeit* bezeichnet, wenn jeder Punkt von \mathcal{M} eine Umgebung besitzt, die äquivalent zu \mathbb{R}^3 (die Menge aus reellen Dreier-Tupeln) ist. Mit anderen Worten besitzt jeder Punkt in \mathcal{M} eine Umgebung, die selbst oder ihr Bild auf \mathbb{R}^3 mit Koordinaten benetzt werden kann. Es wird der Einfachheit halber angenommen, dass \mathcal{M} komplett mit Koordinatenlinien benetzt werden kann. Punkte P in \mathcal{M} werden mit Ortsvektoren \mathbf{x} identifiziert. Oft werden wir auch von einem Punkt \mathbf{x} sprechen. Die Tangentenvektoren an den Koordinatenlinien bilden in jedem Punkt eine Basis, welche den mit $T_P\mathcal{M}$ bezeichneten *Tangentialvektorraum* des betrachteten Punktes P aufspannt. Ein solches Feld von Basisvektoren heißt *Koordinaten- oder holonome Basis* in \mathcal{M} . Ein Feld von Basisvektoren in \mathcal{M} heißt *anholonom*, wenn die Basisvektoren an jedem Punkt nicht als Tangentenvektoren an entsprechenden Koordinatenlinien dargestellt werden können. Wenn nichts anderes gesagt wird, werden alle Felder als so oft stetig differenzierbar angenommen wie erforderlich.

Es wird vorausgesetzt, dass der Tangentialvektorraum an jedem Punkt in \mathcal{M} ein *Euklidischer Vektorraum* ist. Für eine beliebige (holonome oder anholonome) Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ in \mathcal{M} sind $\{\mathbf{g}^i\}$ das reziproke Basissystem und g_{ij} , g^{ij} die entsprechenden *kovarianten* und *kontravarianten* Komponenten des *Metrikensors*

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j \quad , \quad (2.1)$$

$$g_{ij} := \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad , \quad g^{ij} := \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad , \quad g_{ij} = g_{ji} \quad , \quad g^{ij} = g^{ji} \quad , \quad (2.2)$$

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad , \quad \mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad . \quad (2.3)$$

Die *Metrik* g_{ij} an einem Punkt P in M heißt (lokal) Euklidisch genau dann, wenn es im Tangentialvektorraum von P eine Basis mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ gibt. Die Metrik g_{ij} als Feld auf \mathcal{M} heißt (global)

Euklidisch, wenn es ein Feld von holonomen Basisvektoren gibt, relativ zu dem $g_{ij} = \delta_{ij}$ überall auf \mathcal{M} gilt. Für eine weitere beliebige Basis $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ in \mathcal{M} gelten die Beziehungen (2.1) - (2.3) vollkommen analog. Darüber hinaus existiert eine nichtsinguläre Transformationsmatrix B (Elemente B^i_j) mit der Inversen B^{-1} (Elemente $(B^{-1})^i_j$), so dass

$$B^k_m (B^{-1})^m_i = (B^{-1})^k_m B^m_i = \delta^k_i \quad (2.4)$$

und

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = B^j_i \mathbf{g}_j \quad , \quad \mathbf{g}_i = (B^{-1})^m_i \tilde{\mathbf{g}}_m \quad , \quad (2.5)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^i = (B^{-1})^i_n \mathbf{g}^n \quad , \quad \mathbf{g}^i = B^i_j \tilde{\mathbf{g}}^j \quad . \quad (2.6)$$

Es gelten folgende Darstellungen.

Vektor:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i = \tilde{v}^i \tilde{\mathbf{g}}_i = \tilde{v}_i \tilde{\mathbf{g}}^i \quad , \quad (2.7)$$

mit

$$\tilde{v}_m = B^i_m v_i \quad , \quad v_m = (B^{-1})^i_m \tilde{v}_i \quad , \quad (2.8)$$

$$\tilde{v}^m = (B^{-1})^m_i v^i \quad , \quad v^m = B^m_i \tilde{v}^i \quad . \quad (2.9)$$

Tensor zweiter Stufe:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = T^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = T_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \\ &= \tilde{T}^{ij} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j = \tilde{T}_{ij} \tilde{\mathbf{g}}^i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^j = \tilde{T}^i_j \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^j = \tilde{T}_i^j \tilde{\mathbf{g}}^i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit

$$\tilde{T}_{ij} = B^k_i B^l_j T_{kl} \quad , \quad (2.11)$$

$$\tilde{T}^{ij} = (B^{-1})^i_k (B^{-1})^j_l T^{kl} \quad , \quad (2.12)$$

$$\tilde{T}^i_j = (B^{-1})^i_k B^l_j T^k_l \quad , \quad (2.13)$$

$$\tilde{T}_i^j = B^k_i (B^{-1})^j_l T_k^l \quad . \quad (2.14)$$

Tensor dritter Stufe:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^{ijk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k = \mathcal{A}^i_{jk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k = \dots \\ &= \tilde{\mathcal{A}}^{ijk} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j \otimes \tilde{\mathbf{g}}_k = \tilde{\mathcal{A}}^i_{jk} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^j \otimes \tilde{\mathbf{g}}^k = \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{A}}^{ijk} = (B^{-1})^i_m (B^{-1})^j_l (B^{-1})^k_n \mathcal{A}^{mln} \quad , \quad (2.16)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^i_{jk} = (B^{-1})^i_m B^l_j B^n_k \mathcal{A}^m_{ln} \quad , \quad \text{usw.} \quad (2.17)$$

Tensor vierter Stufe:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = \mathcal{A}^i_{jkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l = \dots \\ &= \tilde{\mathcal{A}}^{ijkl} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j \otimes \tilde{\mathbf{g}}_k \otimes \tilde{\mathbf{g}}_l = \tilde{\mathcal{A}}^i_{jkl} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^j \otimes \tilde{\mathbf{g}}^k \otimes \tilde{\mathbf{g}}^l = \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{A}}^{ijkl} = (B^{-1})^i_m (B^{-1})^j_n (B^{-1})^k_r (B^{-1})^l_s \mathcal{A}^{mnr s} \quad , \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^i_{jkl} = (B^{-1})^i_m B^n_j B^r_k B^s_l \mathcal{A}^m_{nrs} \quad , \quad \text{usw.} \quad (2.20)$$

Betrachtet wird jetzt der Fall, dass \mathbf{g}_i und $\tilde{\mathbf{g}}_i$ holonome Basisvektoren (Koordinatenbasisvektoren) sind. Das bedeutet, \mathbf{g}_i und $\tilde{\mathbf{g}}_i$ sind jeweils Tangentenvektoren an den Koordinatenlinien der Koordinatensysteme $\{\theta^k\}$ und $\{\tilde{\theta}^k\}$. Dann existieren zwischen den beiden Koordinatensystemen invertierbare Beziehungen der Form

$$\tilde{\theta}^k = \tilde{\theta}^k(\theta^m) \quad \Leftrightarrow \quad \theta^k = \theta^k(\tilde{\theta}^m) \quad (2.21)$$

und die Transformationen B , B^{-1} in (2.5) und (2.6) stellen Jacobi-Matrizen dar:

$$B^k_i = \frac{\partial \theta^k}{\partial \tilde{\theta}^i} \quad \Leftrightarrow \quad (B^{-1})^k_i = \frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial \theta^i} \quad . \quad (2.22)$$

Im Falle, dass z.B. die Basisvektoren \mathbf{g}_i als stetiges Feld in \mathcal{M} vorgegeben sind, aber keine Koordinatenbasis formen, kann man die mit λ_i parametrisierten Integrallinien der Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda_i} = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(\lambda_i)) \quad , \quad i = \text{fest} \quad (2.23)$$

heranziehen (In [77], Sect. 2.14 wird demonstriert, dass die Lösungen von (2.23) in der Tat keine Koordinatenlinien darstellen). Sind $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i(\lambda_i; \mathbf{x}_0)$ für $i = \text{fest}$ jeweils Integralkurven von (2.23), die für λ_i^0 durch \mathbf{x}_0 gehen, so werden die entsprechenden Linien als anholonome Koordinatenlinien durch \mathbf{x}_0 bezeichnet.

Im weiteren Verlauf sind folgende Definitionen und Beziehungen von Bedeutung. Neben den beiden beliebigen Basissystemen $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$, die stets die Gleichungen (2.1) - (2.6) erfüllen sollen, betrachten wir ein holonomes Basissystem $\{\bar{\mathbf{g}}_m\}$ zugeordnet zu dem Koordinatensystem $\{\bar{\theta}_m\}$. Die Transformationen zwischen den drei Basissystemen sind durch die Matrizen A , B und $C = AB$ gegeben:

$$C^m_i = A^m_k B^k_i \quad \Leftrightarrow \quad (C^{-1})^j_m = (B^{-1})^j_k (A^{-1})^k_m \quad , \quad (2.24)$$

$$\mathbf{g}_k = A^m_k \bar{\mathbf{g}}_m \quad , \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = C^m_i \bar{\mathbf{g}}_m = A^m_k B^k_i \bar{\mathbf{g}}_m = B^k_i \mathbf{g}_k \quad . \quad (2.26)$$

Ansonsten gelten Beziehungen vollkommen analog zu denjenigen in den Gleichungen (2.4) bis (2.20). In Anlehnung an SCHUTZ [77], Sect. 6.4 und SCHOUTEN [76], S.169 werden in Bezug auf $\{\bar{\mathbf{g}}_m\}$, $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ folgende Operationen definiert:

$$\bar{\partial}_m(\cdot) := \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\theta}^m} \quad , \quad (2.27)$$

$$\partial_i(\cdot) := A^m{}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\theta}^m} = A^m{}_i \bar{\partial}_m(\cdot) \quad , \quad (2.28)$$

$$\tilde{\partial}_i(\cdot) := C^m{}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\theta}^m} = C^m{}_i \bar{\partial}_m(\cdot) = B^k{}_i \partial_k(\cdot) \quad . \quad (2.29)$$

Im Falle, dass $\{\mathbf{g}_i\}$ bzw. $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ Koordinatenbasis zu dem Koordinatensystem $\{\theta^i\}$ bzw. $\{\tilde{\theta}^i\}$ ist, stellt A bzw. C die Jacobi - Matrix

$$A^m{}_i = \frac{\partial \bar{\theta}^m}{\partial \theta^i} \quad \text{bzw.} \quad C^m{}_i = \frac{\partial \bar{\theta}^m}{\partial \tilde{\theta}^i} \quad (2.30)$$

dar. In diesem Sonderfall reduziert sich aus (2.28) bzw. (2.29) die einfache partielle Ableitung $\partial_i(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \theta^i$ bzw. $\tilde{\partial}_i(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \tilde{\theta}^i$. In den Umrechnungen kann man mit den Operatoren ∂_i , $\tilde{\partial}_i$, wie mit gewöhnlichen partiellen Ableitungen umgehen.

2.2 Kovariante Ableitung - Zusammenhang - Objekte der Anholonomie

Sei \mathbf{v} ein Vektorfeld auf (tangential an) \mathcal{M} und $\mathbf{u} \in T_P\mathcal{M}$ ein Vektor am Punkt P von \mathcal{M} . Ein *affiner Zusammenhang* auf \mathcal{M} ist ein Operator ∇ , der zu \mathbf{v} und \mathbf{u} einen Vektor $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ am Punkt P , genannt *kovariante Ableitung* von \mathbf{v} entlang \mathbf{u} (oder in Richtung \mathbf{u}), zuordnet. Der Operator ∇ ist durch folgende Eigenschaften definiert:

1) $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ ist linear in Bezug sowohl auf \mathbf{v} als auch auf \mathbf{u} , d.h.

$$\nabla_{\mathbf{u}}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + b\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} \quad , \quad (2.31)$$

$$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{z}}\mathbf{v} = a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + b\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v} \quad , \quad (2.32)$$

wobei a, b beliebige reelle Zahlen, \mathbf{w} beliebiges Vektorfeld auf \mathcal{M} und \mathbf{z} beliebiger Vektor am Punkt P sind.

2) Es gilt

$$\nabla_{f\mathbf{u}}\mathbf{v} = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \quad (2.33)$$

für beliebige skalare Felder f auf \mathcal{M} .

3) Leibnizsche Regel

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = (\nabla_{\mathbf{u}}f)\mathbf{v} + f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \quad (2.34)$$

für beliebige skalare Felder f auf \mathcal{M} .

In Gleichung (2.34) ist $\nabla_{\mathbf{u}} f$ als die *Richtungsableitung* von f in Richtung $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = \bar{u}^i \bar{\mathbf{g}}_i$ definiert:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} f &:= (\text{grad} f) \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}^m} \bar{\mathbf{g}}^m \right) \cdot \mathbf{u} = (\bar{\partial}_m f) \bar{u}^m \\ &= (\bar{\partial}_m f) (A^m_i u^i) = (\partial_i f) u^i \quad .\end{aligned}\tag{2.35}$$

Ein Zusammenhang ∇ auf \mathcal{M} ist in Bezug auf eine beliebige Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ durch die Angabe des Vektors $\nabla_{\mathbf{g}_i} \mathbf{g}_j$ komplett beschrieben. Dieser Vektor kann relativ zur Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ dargestellt werden. Man setzt

$$\nabla_{\mathbf{g}_i} \mathbf{g}_j = \Lambda^k_{ij} \mathbf{g}_k \tag{2.36}$$

an und bezeichnet die Größen Λ^k_{ij} als *Objekte* oder *Symbole des Zusammenhangs* ∇ in Bezug auf die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$. Da $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ linear in \mathbf{u} ist, existiert ein Tensor zweiter Stufe $\nabla \mathbf{v}$, genannt kovariante Ableitung von \mathbf{v} so, dass

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} [\mathbf{u}] \tag{2.37}$$

gilt. Er lässt sich durch Anwendung der Regeln 1) - 3) für $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$ und $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} [\mathbf{u}] &= \nabla_{\mathbf{u}} (v^i \mathbf{g}_i) = (\nabla_{\mathbf{u}} v^i) \mathbf{g}_i + v^i \nabla_{u^m \mathbf{g}_m} \mathbf{g}_i \\ &= (\partial_j v^i) u^j \mathbf{g}_i + v^i u^m \nabla_{\mathbf{g}_m} \mathbf{g}_i = (\partial_j v^i) u^j \mathbf{g}_i + v^i u^m \Lambda^k_{mi} \mathbf{g}_k \\ &= (\partial_j v^i + \Lambda^i_{jr} v^r) \mathbf{g}_i u^j = \{(\partial_j v^i + \Lambda^i_{jr} v^r) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j\} [\mathbf{u}] \quad .\end{aligned}\tag{2.38}$$

Daraus folgt

$$\nabla \mathbf{v} = (\partial_j v^i + \Lambda^i_{jr} v^r) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad , \tag{2.39}$$

oder

$$\nabla \mathbf{v} = \{(\partial_j v^r) \mathbf{g}_r + (\nabla_{\mathbf{g}_j} \mathbf{g}_r) v^r\} \otimes \mathbf{g}^j \tag{2.40}$$

und daher

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla_{\mathbf{g}_j} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{g}^j \quad . \tag{2.41}$$

Sehr oft schreibt man auch

$$\nabla \mathbf{v} = v^i|_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \equiv (\nabla_j v^i) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad , \tag{2.42}$$

mit

$$v^i|_j \equiv \nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Lambda^i_{jr} v^r \quad . \tag{2.43}$$

Die Formeln (2.42) und (2.43) gelten sinngemäß für beliebige Basissysteme.

Die Definition der kovarianten Ableitung eines Vektors kann auf Tensoren höherer Stufe übertragen werden. Dazu verlangt man verallgemeinerte Leibnitzsche Regeln z.B. für Vektorfelder \mathbf{v} , \mathbf{w} von der Form

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} \quad , \quad (2.44)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} \quad . \quad (2.45)$$

Insbesondere kann man den Ausdruck $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j$ betrachten, die kovariante Ableitung in Richtung \mathbf{g}_k bilden und Regel (2.45) in Kombination mit (2.36) anwenden:

$$\nabla_{\mathbf{g}_k}(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = 0 \quad , \quad (2.46)$$

oder

$$(\nabla_{\mathbf{g}_k} \mathbf{g}^i) \cdot \mathbf{g}_j = -\mathbf{g}^i \cdot \nabla_{\mathbf{g}_k} \mathbf{g}_j = -\Lambda^i_{kj} \quad . \quad (2.47)$$

Daher folgt

$$\nabla_{\mathbf{g}_k} \mathbf{g}^i = -\Lambda^i_{kj} \mathbf{g}^j \quad . \quad (2.48)$$

Dies erlaubt, für die gemischtvarianten Darstellungen von Tensoren die entsprechende kovariante Ableitung herzuleiten. So ergibt sich z.B. für einen Vektor $\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$ und einen Tensor zweiter Stufe \mathbf{T} , dargestellt wie in Gleichung (2.7) und (2.10)

$$\nabla \mathbf{v} = v_i|_j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad , \quad (2.49)$$

mit

$$v_i|_j = \partial_j v_i - \Lambda^r_{ji} v_r \quad (2.50)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{T} &= T_{ij}|_k \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k = T^{ij}|_k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k \\ &= T^i_j|_k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k = T_i^j|_k \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k \quad , \end{aligned} \quad (2.51)$$

mit

$$T_{ij}|_k = \partial_k T_{ij} - \Lambda^m_{ki} T_{mj} - \Lambda^m_{kj} T_{im} \quad , \quad (2.52)$$

$$T^{ij}|_k = \partial_k T^{ij} + \Lambda^i_{km} T^{mj} + \Lambda^j_{km} T^{im} \quad , \quad (2.53)$$

$$T^i_j|_k = \partial_k T^i_j + \Lambda^i_{km} T^m_j - \Lambda^m_{kj} T^i_m \quad , \quad (2.54)$$

$$T_i^j|_k = \partial_k T_i^j - \Lambda^m_{ki} T_m^j + \Lambda^j_{km} T_i^m \quad . \quad (2.55)$$

An dieser Stelle sollte bemerkt werden, dass die kovariante Ableitung eines Skalars, eines Vektors, eines Tensors zweiter Stufe etc. jeweils einen Vektor, einen Tensor zweiter Stufe, einen Tensor dritter Stufe, etc. liefert. Diese Tensoren erfüllen die Transformationsbeziehungen der Gleichungen (2.7) bis (2.20) entsprechend.

Die Transformationsbeziehungen zwischen den Symbolen des Zusammenhangs Λ^i_{jk} in Bezug auf $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\tilde{\Lambda}^i_{jk}$ in Bezug auf $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ lassen sich wie folgt gewinnen. Für die kovariante Ableitung eines Vektors $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = \tilde{v}^i \tilde{\mathbf{g}}_i$ gilt einerseits (2.39) und andererseits ist

$$\nabla \mathbf{v} = (\tilde{\partial}_r \tilde{v}^s + \tilde{\Lambda}^s_{rm} \tilde{v}^m) \tilde{\mathbf{g}}_s \otimes \tilde{\mathbf{g}}^r \quad . \quad (2.56)$$

Nach einigen Umrechnungen mit Hilfe der Transformationsbeziehungen (2.4) - (2.9) und der Definitionen (2.28), (2.29) folgt aus (2.56)

$$\nabla \mathbf{v} = (\partial_j v^i + \{B^i_s (B^{-1})^r_j (B^{-1})^m_k \tilde{\Lambda}^s_{rm} + B^i_s \partial_j (B^{-1})^s_k\} v^k) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad . \quad (2.57)$$

Ein Vergleich mit (2.39) liefert das gesuchte Transformationsverhalten:

$$\Lambda^i_{jk} = B^i_s (B^{-1})^r_j (B^{-1})^m_k \tilde{\Lambda}^s_{rm} + B^i_s \partial_j (B^{-1})^s_k \quad , \quad (2.58)$$

bzw.

$$\tilde{\Lambda}^s_{rm} = (B^{-1})^s_i B^j_r B^k_m \Lambda^i_{jk} + (B^{-1})^s_k \tilde{\partial}_r B^k_m \quad . \quad (2.59)$$

Ähnliche Beziehungen gelten offensichtlich zwischen Λ^i_{jk} und $\bar{\Lambda}^i_{jk}$:

$$\bar{\Lambda}^i_{jk} = A^i_s (A^{-1})^r_j (A^{-1})^m_k \Lambda^s_{rm} + A^i_s \bar{\partial}_j (A^{-1})^s_k \quad , \quad (2.60)$$

bzw.

$$\Lambda^s_{rm} = (A^{-1})^s_i A^j_r A^k_m \bar{\Lambda}^i_{jk} + (A^{-1})^s_k \partial_r A^k_m \quad . \quad (2.61)$$

Wegen des letzten Terms auf der rechten Seite der Gleichungen (2.58) bis (2.61) stellen die Objekte des Zusammenhanges keine Komponenten eines Tensors dritter Stufe dar (vgl. dazu (2.16), (2.17)). Diese wohl bekannte Eigenschaft wird in vielen Lehrbüchern nur für holonome Basissysteme erwähnt, gilt aber gleichermaßen auch für anholonome Basissysteme. Man bezeichnet die Objekte Λ^i_{jk} als symmetrisch, wenn $\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}$ gilt.

Es sei noch auf folgenden Sachverhalt aufmerksam gemacht. Nehmen wir an, dass die Symbole Λ^i_{jk} in Bezug auf $\{\mathbf{g}_i\}$ symmetrisch sind. Wegen des zweiten Terms auf der rechten Seite von (2.59) brauchen die Symbole $\tilde{\Lambda}^s_{rm}$ in Bezug auf $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ i.A. nicht mehr symmetrisch zu sein. Auf diesen Sachverhalt werden wir auch in den nächsten Kapiteln zu sprechen kommen. Solche Situationen werden am besten mit Hilfe von Objekten der Anholonomie zum Ausdruck gebracht. Für eine beliebige Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ mit zugehörigen Symbolen des Zusammenhangs Λ^i_{kj} bezeichnet man die Größen \mathcal{C}^s_{rm} , definiert durch

$$\mathcal{C}^s_{rm} := (A^{-1})^s_k (\partial_r A^k_m - \partial_m A^k_r) = -\mathcal{C}^s_{mr} \quad (2.62)$$

als *Objekte der Anholonomie* ("commutation" oder "structure coefficients") für die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$. Eine geometrische Deutung für diese Größen verschieben wir auf Kapitel 2.4.

Es gilt: Die zugrundegelegte Basis ist genau dann eine Koordinatenbasis (holonome Basis), wenn die zugehörigen Objekte der Anholonomie verschwinden. Dass $\mathcal{C}^s_{rm} = 0$ eine notwendige

Bedingung ist, damit $\{\mathbf{g}_i\}$ eine holonome Basis darstellt, sieht man sofort aus (2.62), wenn man dort für die Matrix A aus Gleichung (2.30) einsetzt:

$$(A^{-1})^s_k \partial_r A^k_m = \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} \frac{\partial^2 \bar{\theta}^k}{\partial \theta^r \partial \theta^m} = (A^{-1})^s_k \partial_m A^k_r \quad . \quad (2.63)$$

Da in diesem Fall der Term $\partial_r A^k_m$ in den Indizes r, m symmetrisch ist, verschwindet \mathcal{C}^s_{rm} . Der Beweis, dass $\mathcal{C}^s_{rm} = 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist, damit $\{\mathbf{g}_i\}$ eine holonome Basis darstellt, wird z.B. in LOVELOCK [65], S. 348 erbracht.

Der Vollständigkeit halber werden noch die Objekte der Anholonomie für die drei Basissysteme $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}$, $\{\mathbf{g}_i\}$, $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$ sowie die Verbindungen untereinander angegeben:

Koordinatenbasis $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}$

$$\bar{\mathcal{C}}^i_{jk} = 0 \quad . \quad (2.64)$$

Beliebige Basis $\{\mathbf{g}_i\}$

$$\mathcal{C}^i_{jk} = (A^{-1})^i_n (\partial_j A^n_k - \partial_k A^n_j) \quad . \quad (2.65)$$

Beliebige Basis $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}^i_{jk} &= (C^{-1})^i_n (\tilde{\partial}_j C^m_k - \tilde{\partial}_k C^m_j) \\ &= (B^{-1})^i_n B^m_j B^r_k \mathcal{C}^n_{mr} + (B^{-1})^i_n (\tilde{\partial}_j B^n_k - \tilde{\partial}_k B^n_j) \quad . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Damit gilt auch

$$\Lambda^s_{rm} - \Lambda^s_{mr} = (A^{-1})^s_i A^j_r A^k_m (\bar{\Lambda}^i_{jk} - \bar{\Lambda}^i_{kj}) + \mathcal{C}^s_{rm} \quad , \quad (2.67)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^s_{rm} - \tilde{\Lambda}^s_{mr} &= (B^{-1})^s_i B^j_r B^k_m (\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) + (B^{-1})^s_k (\tilde{\partial}_r B^k_m - \tilde{\partial}_m B^k_r) \\ &= (C^{-1})^s_i C^j_r C^k_m (\bar{\Lambda}^i_{jk} - \bar{\Lambda}^i_{kj}) + \tilde{\mathcal{C}}^s_{rm} \quad . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Man sieht sofort: Sind z.B. die Symbole $\bar{\Lambda}^i_{jk}$ symmetrisch, dann sind die Symbole Λ^s_{rm} genau dann symmetrisch, wenn \mathcal{C}^s_{rm} verschwindet.

Der Begriff der kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes \mathbf{v} in Richtung eines Vektors \mathbf{u} wird jetzt auf den Begriff "kovariante Ableitung eines Vektors \mathbf{v} entlang einer Linie" verallgemeinert. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\theta}^k)$ der Ortsvektor zum Punkt P in \mathcal{M} mit den Koordinaten $\bar{\theta}^k$ ist. Der Tangentenvektor $\bar{\mathbf{g}}_i$ an der $\bar{\theta}^i$ -Koordinatenlinie lautet

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^i} \equiv \bar{\partial}_i \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{g}_i = \partial_i \mathbf{x} \quad . \quad (2.69)$$

Eine mit λ parametrisierte beliebige Kurve ist eine Funktion der Form $\sigma = \sigma(\bar{\theta}^k(\lambda))$. Der Graph dieser Funktion stellt eine Linie G_λ in \mathcal{M} dar. Wir führen die Abkürzung $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\lambda}$ ein und erhalten für den Tangentenvektor $\mathbf{u}(\lambda)$, ($\mathbf{u}(\lambda) := \dot{\sigma}(\lambda) = u^i(\lambda) \mathbf{g}_i(\lambda) = \bar{u}^i(\lambda) \bar{\mathbf{g}}_i(\lambda)$) an der Linie G_λ

$$\mathbf{u}(\lambda) = u^i \mathbf{g}_i := \dot{\sigma}(\lambda) = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\theta}^k} \dot{\bar{\theta}}^k = \dot{\bar{\theta}}^k \bar{\mathbf{g}}_k \quad . \quad (2.70)$$

Unter Beachtung des Transformationsverhaltens (2.25) folgt daraus ($\bar{u}^k \equiv \dot{\bar{\theta}}^k$)

$$u^i = (A^{-1})^i_k \dot{\bar{\theta}}^k \quad . \quad (2.71)$$

Für ein Vektorfeld $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$ gibt der Vektor $D\mathbf{v}/D\lambda$, mit

$$\frac{D\mathbf{v}}{D\lambda} := \nabla_{\mathbf{u}(\lambda)} \mathbf{v} = (u^j \partial_j v^i + \Lambda^i_{jr} u^j v^r) \mathbf{g}_i \quad , \quad (2.72)$$

die kovariante Ableitung von \mathbf{v} längs G_λ an.

Für spätere Zwecke wollen wir hier ein Zwischenergebnis in allgemeiner Form bereitstellen. Sei ϕ ein skalares Feld auf \mathcal{M} . Für die Ableitung von ϕ entlang G_λ gilt

$$\dot{\phi}(\lambda) = \frac{d\phi(\bar{\theta}^k(\lambda))}{d\lambda} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}^k} \dot{\bar{\theta}}^k = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}^k} A^k_j u^j = u^j \partial_j \phi \quad . \quad (2.73)$$

Im Hinblick auf dieses Ergebnis liefert Gleichung (2.72)

$$\frac{D\mathbf{v}}{D\lambda} = \left(\frac{dv^i}{d\lambda} + \Lambda^i_{jr} u^j v^r \right) \mathbf{g}_i \quad . \quad (2.74)$$

Das Feld \mathbf{v} heißt konstant oder parallel verschoben entlang G_λ , wenn die Bedingung $D\mathbf{v}/D\lambda = \mathbf{0}$ überall auf G_λ erfüllt ist. Für ein längs G_λ konstantes Feld \mathbf{v} ist

$$\frac{dv^i}{d\lambda} = -\Lambda^i_{jr} u^j v^r \quad . \quad (2.75)$$

2.3 Richtungsableitung, Levi-Civita-Zusammenhang

Im letzten Kapitel sind wir der kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes längs einer Linie G_λ begegnet. Für dasselbe Feld \mathbf{v} ist die (klassische) Richtungsableitung entlang G_λ durch $\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = \dot{\mathbf{v}}(\lambda) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\theta}^j} \dot{\bar{\theta}}^j \quad (2.76)$$

definiert. Sie lässt sich auch in der Form ($\bar{u}^j = \dot{\bar{\theta}}^j$)

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = (\bar{\partial}_j \mathbf{v}) \bar{u}^j = (\bar{\partial}_j \mathbf{v}) A^j_m u^m = (\partial_m \mathbf{v}) u^m \quad , \quad (2.77)$$

oder

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = (\bar{\partial}_j \mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{g}}^j)[\mathbf{u}] = (\partial_j \mathbf{v} \otimes \mathbf{g}^j)[\mathbf{u}] \quad , \quad (2.78)$$

bzw.

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = (\text{grad} \mathbf{v})[\mathbf{u}] \quad , \quad (2.79)$$

mit

$$\text{grad} \mathbf{v} = \bar{\partial}_j \mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{g}}^j = \partial_j \mathbf{v} \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.80)$$

schreiben. Nach Einsetzen von $\mathbf{v} = \bar{v}^i \bar{\mathbf{g}}_i = v^i \mathbf{g}_i$ in Gleichung (2.78) folgt

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} &\equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = \bar{u}^j \bar{\partial}_j (\bar{v}^i \bar{\mathbf{g}}_i) = \bar{u}^j \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{\theta}^j} \bar{\mathbf{g}}_i + \bar{u}^j \bar{v}^i \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \bar{\theta}^j} \\ &= \bar{u}^j \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{\theta}^j} \bar{\mathbf{g}}_i + \bar{u}^j \bar{v}^i \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^j \partial \bar{\theta}^i} = \bar{u}^j (\bar{\partial}_j \bar{v}^i) \bar{\mathbf{g}}_i + \bar{u}^j \bar{v}^i (\bar{\partial}_j \bar{\partial}_i \mathbf{x}) \quad , \end{aligned} \quad (2.81)$$

bzw. (vgl. (2.73))

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = \frac{d\bar{v}^i}{d\lambda} \bar{\mathbf{g}}_i + \bar{u}^j \bar{v}^i \bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i \quad . \quad (2.82)$$

Analog gilt

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} = u^j (\partial_j v^i) \mathbf{g}_i + u^j v^i (\partial_j \partial_i \mathbf{x}) = \frac{dv^i}{d\lambda} \mathbf{g}_i + u^j v^i \partial_j \mathbf{g}_i \quad . \quad (2.83)$$

Es sei nun an dieser Stelle auf folgenden wichtigen Sachverhalt hingewiesen. Im Allgemeinen kann der Vektor $\partial_j \partial_i \mathbf{x} = \partial_j \mathbf{g}_i$ bzw. $\bar{\partial}_j \bar{\partial}_i \mathbf{x} = \bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i$ nicht durch die Symbole eines Zusammenhangs, beispielsweise λ^r_{ij} bzw. $\bar{\lambda}^r_{ij}$, dargestellt werden. Es gilt also

$$\partial_j \mathbf{g}_i \neq \lambda^r_{ji} \mathbf{g}_r \quad \text{bzw.} \quad \bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i \neq \bar{\lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r \quad . \quad (2.84)$$

Zur Begründung kann man für einen Moment die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} als die Oberfläche einer Kugel betrachten (Riemannsche Mannigfaltigkeit). Dann wird z.B. der Vektor $\bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i$ auch Komponenten in Richtung der Normalen besitzen, d.h. $\bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i$ wird alleine durch lineare Kombination von Vektoren $\bar{\mathbf{g}}_i$ nicht darstellbar sein. Mit anderen Worten stellt der Operator grad in einer Nicht-Euklidischen Mannigfaltigkeit keine kovariante Ableitung dar. Man kann jedoch einen Zusammenhang durch

$$\nabla_{\bar{\mathbf{g}}_j} \bar{\mathbf{g}}_i = \bar{\lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r \quad , \quad (2.85)$$

$$\bar{\lambda}^r_{ji} := \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^j \partial \bar{\theta}^i} \cdot \bar{\mathbf{g}}^r \equiv (\bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i) \cdot \bar{\mathbf{g}}^r = \bar{\lambda}^r_{ij} \quad (2.86)$$

eingeführen, der als *Levi-Civita-Zusammenhang* benannt wird. Im Sonderfall einer Euklidischen Mannigfaltigkeit wird $\nabla_{\bar{\mathbf{g}}_j} \bar{\mathbf{g}}_i = \bar{\partial}_j \bar{\mathbf{g}}_i = \bar{\lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r$. Wir stellen fest:

In Bezug auf eine holonome Basis sind die Objekte des Levi-Civita-Zusammenhangs symmetrisch.

Nun wenden wir uns den Symbolen λ^s_{rm} zu:

$$\nabla_{\mathbf{g}_r} \mathbf{g}_m = \lambda^s_{rm} \mathbf{g}_s \quad , \quad (2.87)$$

$$\lambda^s_{rm} := \partial_r \partial_m \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^s = (\partial_r \mathbf{g}_m) \cdot \mathbf{g}^s \quad , \quad (2.88)$$

$$\lambda^s_{rm} = (A^{-1})^s_i A^j_r A^k_m \bar{\lambda}^i_{jk} + (A^{-1})^s_k \partial_r A^k_m \quad . \quad (2.89)$$

Relativ zu einer Koordinatenbasis $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}$ kommutiert der Operator $\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j(\cdot)$, d.h. $\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j = \bar{\partial}_j \bar{\partial}_i$ und $\bar{\lambda}^r_{ij}$ ist daher symmetrisch. In Bezug auf eine anholonome Basis z.B. $\{\mathbf{g}_i\}$ kommutiert $\partial_i \partial_j(\cdot)$ nicht. Konsequenterweise ist $\lambda^r_{ij} \neq \lambda^r_{ji}$. Vermöge der Symmetrie von $\bar{\lambda}^r_{jk}$ ergibt sich aus (2.67)

$$\mathcal{C}^s_{rm} = \lambda^s_{rm} - \lambda^s_{mr} = (\partial_r \mathbf{g}_m) \cdot \mathbf{g}^s - (\partial_m \mathbf{g}_r) \cdot \mathbf{g}^s \quad . \quad (2.90)$$

Ähnlicherweise (vgl. (2.68)) ist

$$\tilde{\mathcal{C}}^s_{rm} = \tilde{\lambda}^s_{rm} - \tilde{\lambda}^s_{mr} \quad . \quad (2.91)$$

Diese Resultate sagen aus, dass die Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs in Bezug auf anholonome Basissysteme nicht mehr symmetrisch sind.

Der Levi-Civita-Zusammenhang weist außerdem eine bemerkenswerte Eigenschaft auf, auf die wir jetzt eingehen wollen. Es wird angenommen, dass zwei Vektorfelder $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$, $\mathbf{w} = w^i \mathbf{g}_i$ jeweils konstant entlang einer Linie G_λ sind und es wird nach der Ableitung $\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ längs G_λ gefragt:

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \frac{d}{d\lambda}(v^i w^j g_{ij}) = v^i w^j \dot{g}_{ij} + \dot{v}^i w^j g_{ij} + v^i \dot{w}^j g_{ij} \quad . \quad (2.92)$$

Für \mathbf{v} , \mathbf{w} gilt (2.75) mit $\Lambda^i_{jr} = \lambda^i_{jr}$. Daher ist

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v^i w^j \dot{g}_{ij} - \lambda^i_{mr} g_{ij} u^m v^r w^j - \lambda^j_{mr} g_{ij} u^m v^i w^r \quad . \quad (2.93)$$

In diesem Ausdruck ist noch \dot{g}_{ij} zu bestimmen. Wegen (2.73) wird

$$\dot{g}_{ij} = u^m \partial_m g_{ij} \quad . \quad (2.94)$$

Man berechnet

$$\partial_m g_{ij} = \partial_m (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = (\partial_m \mathbf{g}_i) \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot (\partial_m \mathbf{g}_j) = \lambda^s_{mi} g_{sj} + \lambda^s_{mj} g_{si} \quad . \quad (2.95)$$

Es folgt also

$$\dot{g}_{ij} = \lambda^s_{mi} g_{sj} u^m + \lambda^s_{mj} g_{si} u^m \quad . \quad (2.96)$$

Nach Einsetzen von (2.96) in (2.93) und Umbenennen von Indizes folgt

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0 \quad . \quad (2.97)$$

In Worten: Für zwei gemäß dem Levi-Civita-Zusammenhang konstante Vektorfelder entlang einer Linie bleibt deren inneres Produkt erhalten. (Der Levi-Civita-Zusammenhang ist mit der Metrik verträglich. Solche Zusammenhänge werden *metrisch* genannt.) Eine weitere wichtige Eigenschaft des Levi-Civita-Zusammenhangs ergibt sich aus der Identität (2.95), die im Hinblick auf (2.52) auch in der Form

$$g_{ij}|_m := \partial_m g_{ij} - \lambda^k_{mi} g_{kj} - \lambda^k_{mj} g_{ik} = 0 \quad (2.98)$$

geschrieben werden kann. Die Gleichung (2.98) drückt das sog. *Lemma von Ricci* aus: "Die (Levi-Civita) kovariante Ableitung des Metriktensors verschwindet."

2.4 Lie-Klammer

Das Ziel ist die Objekte der Anholonomie, die recht formal definiert wurden, mit geometrischem Inhalt zu füllen. Dazu bedienen wir uns dem Vektor *Lie-Klammer* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ von zwei Vektorfeldern \mathbf{u} und \mathbf{v} . Dieser wird folgendermaßen eingeführt. Betrachte die Integrallinien von \mathbf{u} und \mathbf{v} , die wir uns jeweils mit unterschiedlichen dimensionslosen Parametern λ und μ parametrisiert denken. In der Abbildung 2.1 gehören zu den Punkten P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 jeweils Ortsvektoren

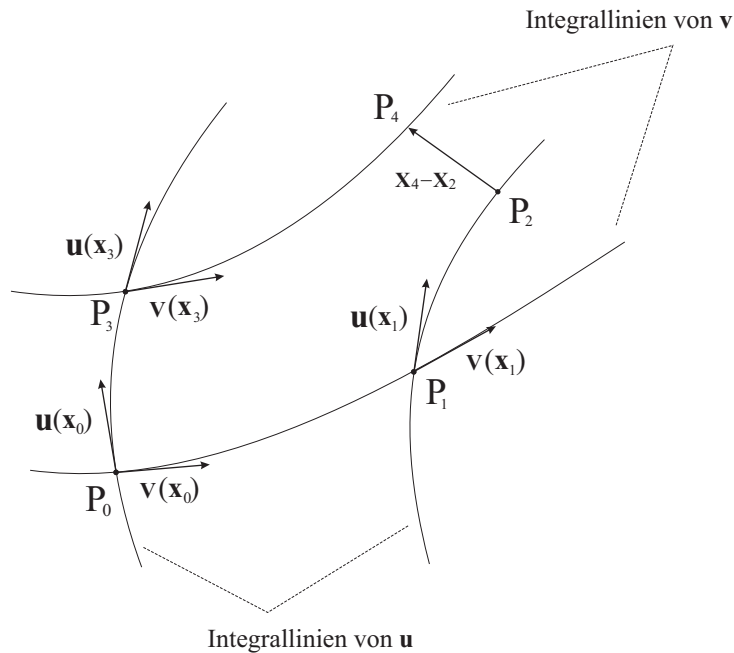


Abbildung 2.1: Geometrische Interpretation der Lie-Klammer: Bis auf Terme höherer Ordnung in ϵ gilt $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2 = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \epsilon^2$.

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$. Sei P_0 ein Punkt in \mathcal{M} an dem die Vektorfelder die Werte $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ und $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ annehmen. Durch diesen Punkt gehen Integrallinien von \mathbf{u} und \mathbf{v} jeweils tangential zu $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ und $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$. Wir bewegen uns jetzt entlang der Integrallinie von \mathbf{v} um eine Parameteränderung

ε bis zum Punkt P_1 . Dort haben \mathbf{u} und \mathbf{v} die Werte $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1)$ und $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1)$. Vom Punkt P_1 bewegen wir uns weiter entlang der Integrallinie von \mathbf{u} um eine Parameteränderung ε bis zum Punkt P_2 . Andererseits kann man sich von P_0 zuerst entlang der Integrallinie von \mathbf{u} bis zum Punkt P_3 und anschließend entlang der Integrallinie von \mathbf{v} , jeweils um eine Parameteränderung ε , bis zum Punkt P_4 bewegen. Sind die Integrallinien von \mathbf{u} und \mathbf{v} Koordinatenlinien, werden die Punkte P_2 und P_4 zusammenfallen, d.h. $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist die Differenz $\frac{1}{\varepsilon^2}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2)$ als die Lie-Klammer $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ an der Stelle \mathbf{x}_0 definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2 &= (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3) + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0) - \{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\} \\ &= \{(\mathbf{v}(\mathbf{x}_3) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\} \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \\ &= [\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}]_{\mathbf{x}_0} \varepsilon^2 + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Da die Stelle \mathbf{x}_0 beliebig ausgewählt wurde, folgt für $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ an der Stelle \mathbf{x}

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \quad . \quad (2.100)$$

Eine Ausrechnung dieser Gleichung für $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = \bar{u}^i \bar{\mathbf{g}}_i$ und $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = \bar{v}^i \bar{\mathbf{g}}_i$ liefert relativ zum holonomen Basissystem $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}$ (vgl. (2.83))

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\bar{u}^j \bar{\partial}_j \bar{v}^i - \bar{v}^j \bar{\partial}_j \bar{u}^i) \bar{\mathbf{g}}_i + \bar{u}^j \bar{v}^i (\bar{\partial}_j \bar{\partial}_i \mathbf{x} - \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j \mathbf{x}) \quad . \quad (2.101)$$

Wegen der Symmetrie des Operators $\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j (\cdot)$ verschwindet der letzte Term in dieser Gleichung:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\bar{u}^j \bar{\partial}_j \bar{v}^i - \bar{v}^j \bar{\partial}_j \bar{u}^i) \bar{\mathbf{g}}_i \quad . \quad (2.102)$$

Die rechte Seite von (2.102) stellt eine lineare Kombination von Basisvektoren des Tangentialvektorraumes von \mathbf{x} dar. Es folgt daraus, dass $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ an der Stelle \mathbf{x} ein Vektor aus dem Tangentialvektorraum von \mathbf{x} ist. Schreibt man den Vektor $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ in Bezug auf die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$, so wird

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i) \mathbf{g}_i + u^j v^i (\partial_j \partial_i \mathbf{x} - \partial_i \partial_j \mathbf{x}) \quad . \quad (2.103)$$

Offensichtlich ist der letzte Term auf der rechten Seite von (2.103) ein Vektor aus dem Tangentialvektorraum des Punktes \mathbf{x} . Er lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} u^j v^i (\partial_j \partial_i \mathbf{x} - \partial_i \partial_j \mathbf{x}) &= \{u^j v^i (\partial_j \mathbf{g}_i - \partial_i \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}^r\} \mathbf{g}_r \\ &= u^j v^i \{(\partial_j \mathbf{g}_i) \cdot \mathbf{g}^r - (\partial_i \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}^r\} \mathbf{g}_r \\ &= u^j v^i (\lambda^r_{ji} - \lambda^r_{ij}) \mathbf{g}_r \quad , \end{aligned} \quad (2.104)$$

oder auf Grund von (2.90)

$$u^j v^i (\partial_j \partial_i \mathbf{x} - \partial_i \partial_j \mathbf{x}) = u^j v^i C^r_{ji} \mathbf{g}_r \quad . \quad (2.105)$$

Insbesondere ergibt sich daraus

$$[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j] = C^r_{ij} \mathbf{g}_r \quad . \quad (2.106)$$

Diese Formel gibt die geometrische Deutung der Objekte der Anholonomie an. Schließlich folgt aus (2.103), (2.105) für ein beliebiges Basissystem $\{\mathbf{g}_i\}$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i) \mathbf{g}_i + u^j v^k C^i_{jk} \mathbf{g}_i \quad . \quad (2.107)$$

Man erkennt: Nur dann, wenn $\{\mathbf{g}_i\}$ holonom ist, verschwindet C^i_{jk} und der Vektor $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ erfüllt eine Gleichung der Form (2.102).

2.5 Der Torsionstensor

Es seien wieder $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ und $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$ zwei Vektorfelder. Diese definieren Integrallinien auf \mathcal{M} in eindeutiger Weise. \mathcal{M} selbst ist mit einem Zusammenhang Λ^i_{jk} in Bezug auf die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ ausgerüstet. Die Integrallinien von \mathbf{u} und \mathbf{v} sind jeweils mit dimensionslosen Parametern λ und μ parametrisiert. Wir greifen eine Integrallinie C_λ von $\mathbf{u}(\lambda)$ und eine Integrallinie C_μ von $\mathbf{v}(\mu)$ mit gemeinsamem Punkt P_0 heraus (s. Abbildung 2.2). Am Punkt P_0 (Parameter λ_0, μ_0 , Ortsvektor \mathbf{x}_0) ist $\mathbf{u}(\lambda_0) = \mathbf{u}_0$ und $\mathbf{v}(\lambda_0) = \mathbf{v}_0$. Der Vektor \mathbf{v}_0 wird nun längs C_λ um $\Delta\lambda = \varepsilon$ bis zum Punkt P_1 (Ortsvektor \mathbf{x}_1) parallel verschoben. Dort nimmt er den Wert \mathbf{v}_1 an. Andererseits verschieben wir parallel den Vektor \mathbf{u}_0 entlang C_μ um $\Delta\mu = \varepsilon$ bis zum Punkt P_3 (Ortsvektor \mathbf{x}_3). Dort hat er den Wert \mathbf{u}_1 . Für kleines ε können \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_3 linear approximiert werden:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0 \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad . \quad (2.108)$$

Zusätzlich werden die Punkte P_2 (Ortsvektor \mathbf{x}_2) und P_4 (Ortsvektor \mathbf{x}_4) mit

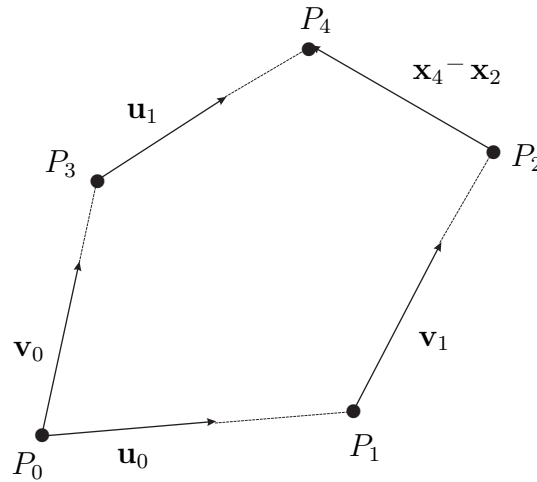


Abbildung 2.2: Der Vektor \mathbf{v}_1 (bzw. \mathbf{u}_1) ergibt sich durch Parallelverschiebung von \mathbf{v}_0 (bzw. \mathbf{u}_0) entlang $\mathbf{u}(\lambda)$ bzw. $\mathbf{v}(\mu)$.

$$\mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1 \varepsilon \quad , \quad \mathbf{x}_4 := \mathbf{x}_3 + \mathbf{u}_1 \varepsilon \quad (2.109)$$

betrachtet. Als eine wichtige Eigenschaft der geometrischen Struktur von \mathcal{M} kann die Differenz

$$\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) \varepsilon - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad (2.110)$$

angesehen werden. Sei $\mathbf{f}(\lambda) = f^i \mathbf{g}_i$ der entlang C_λ parallel verschobene Vektor \mathbf{v}_0 , wobei $\mathbf{f}(\lambda_0) = \mathbf{v}_0$ und $\mathbf{f}(\lambda_0 + \varepsilon) = \mathbf{v}_1$ ist. Er erfüllt die Differentialgleichung (s. (2.75))

$$\frac{df^i}{d\lambda} = -\Lambda^i_{jk} u^j f^k \quad . \quad (2.111)$$

Aus der asymptotischen Entwicklung von $\mathbf{f}(\lambda)$ um λ_0 folgt

$$\mathbf{f}(\lambda_0 + \varepsilon) = \mathbf{f}(\lambda_0) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad (2.112)$$

oder

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = \left[\frac{df^i}{d\lambda} \mathbf{g}_i + u^j f^i (\partial_j \mathbf{g}_i) \right]_{\lambda_0} \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad . \quad (2.113)$$

Unter Berücksichtigung von (2.111) wird schließlich

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = [u^j f^i (\partial_j \mathbf{g}_i) - \Lambda^i_{jk} u^j f^k \mathbf{g}_i]_{\lambda_0} \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad . \quad (2.114)$$

Analog erhält man

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = [v^j h^i (\partial_j \mathbf{g}_i) - \Lambda^i_{jk} v^j h^k \mathbf{g}_i]_{\mu_0} \varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad (2.115)$$

mit $\mathbf{h}(\mu) = h^i \mathbf{g}_i$, $\mathbf{h}(\mu_0) = \mathbf{u}_0$ und $\mathbf{h}(\mu_0 + \varepsilon) = \mathbf{u}_1$. Nach Einsetzen von (2.114) und (2.115) in (2.110) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2}{\varepsilon^2} &= \{(\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) \mathbf{g}_i + (\partial_k \mathbf{g}_j - \partial_j \mathbf{g}_k)\} u^j v^k \\ &= \{(\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) \mathbf{g}_i - (\partial_j \mathbf{g}_k - \partial_k \mathbf{g}_j)\} u^j v^k \quad , \end{aligned} \quad (2.116)$$

wobei auf die Erwähnung des Punktes \mathbf{x}_0 verzichtet wurde, weil er beliebig ausgewählt wurde. Aus den Formeln (2.38) für die kovariante Ableitung und (2.107) für die Lie-Klammer sieht man, dass

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= (u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i) \mathbf{g}_i + (\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) u^j v^k \mathbf{g}_i \\ &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}] - (\partial_j \mathbf{g}_k - \partial_k \mathbf{g}_j) u^j v^k + (\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) u^j v^k \mathbf{g}_i \quad , \end{aligned} \quad (2.117)$$

oder

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) u^j v^k \mathbf{g}_i - (\partial_j \mathbf{g}_k - \partial_k \mathbf{g}_j) u^j v^k \quad (2.118)$$

gilt. Es folgt also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2}{\varepsilon^2} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \quad . \quad (2.119)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Vektor, der linear von \mathbf{u} und \mathbf{v} abhängt. Deswegen existiert ein Tensor dritter Stufe \mathcal{T} , genannt *Torsion*, mit der Eigenschaft

$$\mathcal{T}[\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}] := \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \quad (2.120)$$

und

$$\mathcal{T}^i_{jk} = -\mathcal{T}^i_{kj} = (\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) - \mathcal{C}^i_{jk} \quad (2.121)$$

für beliebige Vektorfelder \mathbf{u}, \mathbf{v} . Man bezeichnet den affinen Zusammenhang ∇ (nicht seine Symbole) torsionsfrei oder symmetrisch genau dann, wenn die Torsion \mathcal{T} verschwindet. Man unterscheidet zwei Fälle:

a) Das Basissystem $\{\mathbf{g}_i\}$ ist holonom. Dann verschwinden die Symbole \mathcal{C}^i_{jk} und $\mathcal{T}^i_{jk} = \Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}$. In diesem Fall ist der Zusammenhang genau dann symmetrisch, wenn $\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}$ ist.

b) Das Basissystem $\{\mathbf{g}_i\}$ ist anholonom. Dann verschwinden die Symbole \mathcal{C}^i_{jk} nicht. Der Zusammenhang ist genau dann symmetrisch, wenn $\mathcal{T} = 0 \Leftrightarrow \Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj} = \mathcal{C}^i_{jk}$. In Worten: Λ^i_{jk} ist nicht symmetrisch. Ist $\mathcal{T} \neq 0$ so kann Λ^i_{jk} sowohl symmetrisch als auch nicht symmetrisch sein.

2.6 Darstellungsformeln für die Objekte des Zusammenhangs

Wir haben in Kapitel 2.3 gesehen, dass die Levi-Civita kovariante Ableitung der Metrik verschwindet (s. (2.98)). Dies trifft natürlich für eine allgemeine kovariante Ableitung nicht mehr zu. Sind Λ^m_{ik} die Symbole des Zusammenhangs in Bezug auf die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ und definiert man

$$-\mathcal{Q}_{lik} \equiv -\mathcal{Q}_{lki} := \partial_l g_{ik} - \Lambda^m_{li} g_{mk} - \Lambda^m_{lk} g_{im} \quad , \quad (2.122)$$

dann ist i.A. $\mathcal{Q}_{lik} \neq 0$. Ausgehend von Gleichung (2.122) werden wir eine Darstellungsformel für Λ^m_{lk} aufbauen. Durch zyklisches Vertauschen von Indizes folgt aus (2.122)

$$-\mathcal{Q}_{ikl} = \partial_i g_{kl} - \Lambda^m_{ik} g_{ml} - \Lambda^m_{il} g_{km} \quad (2.123)$$

und

$$-\mathcal{Q}_{kli} = \partial_k g_{li} - \Lambda^m_{kl} g_{mi} - \Lambda^m_{ki} g_{lm} \quad . \quad (2.124)$$

Addiert man (2.123) zu (2.122) und zieht davon (2.124) ab, so erhält man nach einigen Umrechnungen

$$\begin{aligned} \Lambda^r_{il} &= \frac{1}{2} g^{rk} (\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{kl} - \partial_k g_{li}) + \frac{1}{2} (\Lambda^r_{il} - \Lambda^r_{li}) - \frac{1}{2} g^{rk} g_{im} (\Lambda^m_{lk} - \Lambda^m_{kl}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{kr} g_{ml} (\Lambda^m_{ik} - \Lambda^m_{ki}) + \frac{1}{2} g^{rk} (\mathcal{Q}_{lik} + \mathcal{Q}_{ikl} - \mathcal{Q}_{kli}) \quad , \end{aligned} \quad (2.125)$$

oder unter Beachtung von (2.121)

$$\begin{aligned} \Lambda^r_{il} &= \frac{1}{2} g^{rk} (\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{kl} - \partial_k g_{li}) + \frac{1}{2} (\mathcal{C}^r_{il} + \mathcal{C}^r_{li} - \mathcal{C}^r_{il}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{T}^r_{il} + \mathcal{T}^r_{li} - \mathcal{T}^r_{il}) + \frac{1}{2} (\mathcal{Q}^r_{li} + \mathcal{Q}^r_{il} - \mathcal{Q}^r_{li}) \quad . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Die Gleichung (2.126) ist eine recht allgemeine Darstellungsformel für die Symbole des Zusammenhangs in Bezug auf eine zuerst beliebige Basis $\{\mathbf{g}_i\}$. Die Größen $\Gamma^r_{il} := \frac{1}{2} g^{rk} (\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{kl} -$

$\partial_k g_{li}$) wollen wir hier als *Christoffel-Symbole* bezeichnen. Die Gleichung (2.126) enthält drei wichtige Sonderfälle:

- 1) Der Zusammenhang ist symmetrisch (torsionsfrei). Dann verschwindet der Klammerausdruck mit den Komponenten des Torsionstensors.
- 2) Die Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ ist holonom. Dann verschwindet der Klammerausdruck mit den Objekten der Anholonomie.
- 3) Der Zusammenhang ist verträglich mit der Metrik (metrischer Zusammenhang). Dann verschwindet die kovariante Ableitung der Metrik und deswegen auch der Klammerausdruck mit den Symbolen \mathcal{Q}_{li}^r .

Die Formel (2.126) erlaubt es außerdem, folgenden Satz zu beweisen.

Satz: "Es gibt genau einen Zusammenhang, der symmetrisch (torsionsfrei) und metrisch ist."

Zum Beweis nimmt man zuerst an, dass ein solcher Zusammenhang existiert. Da er torsionsfrei und metrisch ist, ergibt sich aus (2.126) für diesen Zusammenhang, dessen Symbole wir relativ zu $\{\mathbf{g}_i\}$ mit λ^r_{il} bezeichnen wollen

$$\lambda^r_{il} = \frac{1}{2} g^{rk} (\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{kl} - \partial_k g_{li}) + \frac{1}{2} (\mathcal{C}^r_{il} + \mathcal{C}^r_{li} - \mathcal{C}^r_{il}) \quad . \quad (2.127)$$

Die rechte Seite von (2.127) ist wohldefiniert. Somit existiert der angenommene Zusammenhang tatsächlich und er ist eindeutig. Umgekehrt kann man für λ^r_{il} in (2.127) durch Basiswechsel zeigen, dass dies Symbole eines Zusammenhangs sind. Durch Ausrechnen wird man ferner ermitteln, dass $\lambda^r_{il} - \lambda^r_{li} = \mathcal{C}^r_{il}$ gilt. Das bedeutet, der durch (2.127) eingeführte Zusammenhang ist symmetrisch. Man wird also bestätigen, dass die kovariante Ableitung der Metrik $\partial_l g_{ik} - \lambda^m_{li} g_{mk} - \lambda^m_{lk} g_{im}$ für λ^m_{li} gemäß (2.127) identisch verschwindet. Demzufolge ist der durch (2.127) eingeführte Zusammenhang auch metrisch. Dies vervollständigt den Beweis.

Wir erinnern daran, dass der Levi-Civita-Zusammenhang symmetrisch und metrisch ist. Also stellt (2.127) den Levi-Civita-Zusammenhang dar. Dies ist auch der Grund für die gewählte Notation auf der linken Seite von (2.127).

2.7 Der Riemannsche Krümmungstensor

Bekannterweise ändert sich ein Vektor bei paralleler Verschiebung in einer Euklidischen Mannigfaltigkeit nicht. Dies motiviert einen Vektor entlang zwei verschiedener Wege C_1 und C_2 von einem Punkt P zu einem Punkt R parallel zu transportieren. Die Differenz zwischen den resultierenden Vektoren am Punkt R ist ein Maß für die Abweichung des Raumes von Euklidischen Verhältnissen. Diese Differenz wird, wie wir sehen werden, mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors zum Ausdruck gebracht. In der Abbildung 2.3 sind zwei Wege C_1 und C_2 erkennbar, die jeweils vom Punkt P zum Punkt R führen. Ein Vektor \mathbf{v}_0 am Punkt P wird

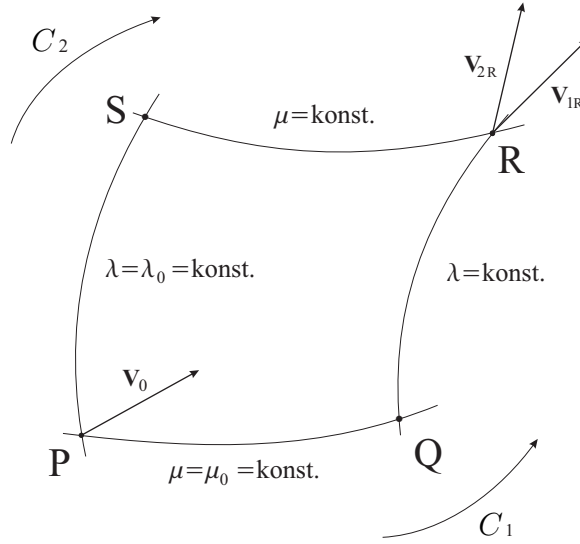


Abbildung 2.3: Parallele Verschiebung eines Vektors in einer nicht Euklidischen Mannigfaltigkeit.

parallel verschoben zum Punkt R , zuerst entlang C_1 über Punkt Q . Alle Wege werden mit dimensionslosen Parametern λ und μ parametrisiert. Entlang des Weges von P (Parameter λ_0, μ_0) bis Q (Parameter $\lambda_0 + \Delta\lambda, \mu_0$) bleibt $\mu = \mu_0 = konst.$, während entlang des Weges von Q bis R (Parameter $\lambda_0 + \Delta\lambda, \mu_0 + \Delta\lambda$) bleibt $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = konst.$ Das durch die parallele Verschiebung resultierende Vektorfeld bezeichnen wir mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda, \mu)$. Es ist $\mathbf{v}(\lambda_0, \mu_0) = \mathbf{v}_p \equiv \mathbf{v}_0$. Den Weg C_1 stellen wir uns mit Funktionen $\bar{\theta}^k = \bar{\theta}^k(\lambda, \mu)$ beschrieben vor. Den Wert von \mathbf{v} am Punkt R als Ergebnis der parallelen Verschiebung entlang C_1 bezeichnen wir mit \mathbf{v}_{1R} . Dabei kennzeichnet der Index 1 den Weg 1. Des Weiteren wird folgende asymptotische Entwicklung zu Grunde gelegt:

$$\mathbf{v}_{1R} = \mathbf{v}_Q + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_Q \Delta\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} \right)_Q (\Delta\mu)^2 + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad , \quad (2.128)$$

mit

$$\varepsilon := \max \{ \Delta\lambda, \Delta\mu \} \quad . \quad (2.129)$$

In diese Gleichung setzen wir

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right)_P \Delta\lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda^2} \right)_P (\Delta\lambda)^2 + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad , \quad (2.130)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_Q = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_P + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_P \Delta\lambda + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad , \quad (2.131)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} \right)_Q = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} \right)_P + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad , \quad (2.132)$$

ein und bekommen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1R} = \mathbf{v}_P &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right)_P \Delta \lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda^2} \right)_P (\Delta \lambda)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_P \Delta \mu \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_P \Delta \lambda \Delta \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} \right)_P (\Delta \mu)^2 + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad . \end{aligned} \quad (2.133)$$

Andererseits wird \mathbf{v}_0 entlang des Weges C_2 zum Punkt R parallel verschoben und bekommt am Punkt R den Wert \mathbf{v}_{2R} . Entlang des Weges C_2 ist zwischen P und S (Parameter $\lambda_0, \mu_0 + \Delta \mu$) $\lambda = \lambda_0 = \text{konst.}$ und zwischen S und R , $\mu = \mu_0 + \Delta \mu = \text{konst.}$ Ähnlich wie oben findet man

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2R} = \mathbf{v}_P &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right)_P \Delta \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} \right)_P (\Delta \mu)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right)_P \Delta \lambda \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right)_P \Delta \lambda \Delta \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda^2} \right)_P (\Delta \lambda)^2 + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad . \end{aligned} \quad (2.134)$$

Auf diese Weise wird die Differenz $\mathbf{v}_{1R} - \mathbf{v}_{2R}$ durch

$$\mathbf{v}_{1R} - \mathbf{v}_{2R} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right\}_P \Delta \lambda \Delta \mu + \mathbf{O}(\varepsilon^3) \quad (2.135)$$

approximiert. Der Punkt P ist beliebig ausgewählt und es kann auf seine Erwähnung verzichtet werden. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{1R} - \mathbf{v}_{2R}}{\Delta \lambda \Delta \mu} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \quad . \quad (2.136)$$

Jetzt führen wir die Notation $\dot{\theta}^k = \partial \bar{\theta}^k / \partial \lambda$, $\dot{\theta}^k = \partial \bar{\theta}^k / \partial \mu$ ein und nehmen die Darstellung $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = \bar{v}^i \bar{\mathbf{g}}_i$ an. Zusätzlich setzen wir voraus, dass unsere Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit einem Zusammenhang ausgerüstet ist, dessen Symbole $\bar{\Lambda}^r_{ij}$ in Bezug auf die Basis $\{\bar{\mathbf{g}}\}$ sind. Gemäß (2.82) berechnet man für die Ableitung $\partial \mathbf{v} / \partial \lambda$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \lambda} \bar{\mathbf{g}}_i + \dot{\theta}^j \bar{v}^i \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \theta^j \partial \theta^i} \quad , \quad (2.137)$$

oder, da \mathbf{v} aus einer parallelen Verschiebung entsteht (vgl. (2.75))

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} = \dot{\theta}^j \bar{v}^i \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \theta^j \partial \theta^i} - \bar{\Lambda}^r_{ji} \dot{\theta}^j \bar{v}^i \bar{\mathbf{g}}_r = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \theta^j \partial \theta^i} - \bar{\Lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r \right) \dot{\theta}^j \bar{v}^i \quad . \quad (2.138)$$

Weitere Differentiation nach μ liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\partial^3 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^m \partial \theta^j \partial \theta^i} - (\bar{\partial}_m \bar{\Lambda}^r_{ji}) \bar{\mathbf{g}}_r - \bar{\Lambda}^r_{ji} \bar{\partial}_m \bar{\mathbf{g}}_r \right) \dot{\theta}^m \dot{\theta}^j \bar{v}^i \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^j \partial \theta^i} - \bar{\Lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r \right) (\dot{\theta}^j)' \bar{v}^i - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \theta^j \partial \theta^i} - \bar{\Lambda}^r_{ji} \bar{\mathbf{g}}_r \right) \dot{\theta}^j \bar{\Lambda}^i_{mn} \dot{\theta}^m \bar{v}^n \quad . \end{aligned} \quad (2.139)$$

Durch Vertauschen von $(\cdot)'$ durch $(\cdot)^\cdot$ entsteht daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} &= \left(\frac{\partial^3 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^m \partial \bar{\theta}^j \partial \bar{\theta}^i} - (\bar{\partial}_m \bar{\Lambda}_{ji}^r) \bar{\mathbf{g}}_r - \bar{\Lambda}_{ji}^r \bar{\partial}_m \bar{\mathbf{g}}_r \right) \dot{\bar{\theta}}^m \dot{\bar{\theta}}^j \bar{v}^i \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^j \partial \bar{\theta}^i} - \bar{\Lambda}_{ji}^r \bar{\mathbf{g}}_r \right) (\dot{\bar{\theta}}^j)^\cdot \bar{v}^i - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^j \partial \bar{\theta}^i} - \bar{\Lambda}_{ji}^r \bar{\mathbf{g}}_r \right) \dot{\bar{\theta}}^j \bar{\Lambda}_{mn}^i \dot{\bar{\theta}}^m \bar{v}^n \quad . \end{aligned} \quad (2.140)$$

Nach Einsetzen in (2.136) erhält man

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{1R} - \mathbf{v}_{2R}}{\Delta \lambda \Delta \mu} = (\bar{\partial}_j \bar{\Lambda}_{mi}^r - \bar{\partial}_m \bar{\Lambda}_{ji}^r + \bar{\Lambda}_{jn}^r \bar{\Lambda}_{mi}^n - \bar{\Lambda}_{mn}^r \bar{\Lambda}_{ji}^n) \bar{\mathbf{g}}_r \dot{\bar{\theta}}^m \dot{\bar{\theta}}^j \bar{v}^i \quad , \quad (2.141)$$

oder

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{1R} - \mathbf{v}_{2R}}{\Delta \lambda \Delta \mu} &= \bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r \bar{\mathbf{g}}_r \bar{v}^i \dot{\bar{\theta}}^j \dot{\bar{\theta}}^m \\ &= (\bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r \bar{\mathbf{g}}_r \otimes \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j \otimes \bar{\mathbf{g}}^m) [\mathbf{v}, \dot{\bar{\theta}}^s \bar{\mathbf{g}}_s, \dot{\bar{\theta}}^l \bar{\mathbf{g}}_l] \\ &= \mathcal{R}[\mathbf{v}, \dot{\bar{\theta}}^s \bar{\mathbf{g}}_s, \dot{\bar{\theta}}^l \bar{\mathbf{g}}_l] \quad . \end{aligned} \quad (2.142)$$

Mit

$$\mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r \bar{\mathbf{g}}_r \otimes \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j \otimes \bar{\mathbf{g}}^m \quad (2.143)$$

folgt dann

$$\bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r := \bar{\partial}_j \bar{\Lambda}_{mi}^r - \bar{\partial}_m \bar{\Lambda}_{ji}^r + \bar{\Lambda}_{jn}^r \bar{\Lambda}_{mi}^n - \bar{\Lambda}_{mn}^r \bar{\Lambda}_{ji}^n \quad . \quad (2.144)$$

Auf der linken Seite von (2.142) steht ein Vektor. Also, stellt die rechte Seite von (2.142) einen Vektor dar. Zusätzlich ist die rechte Seite von (2.142) eine lineare Funktion der Vektoren $\mathbf{v}, \dot{\bar{\theta}}^s \bar{\mathbf{g}}_s, \dot{\bar{\theta}}^l \bar{\mathbf{g}}_l$. Folglich ist \mathcal{R} ein Tensor vierter Stufe, den man als *Riemannschen Krümmungstensor* bezeichnet.

Im Bezug auf eine beliebige Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ hat \mathcal{R} die Komponenten \mathcal{R}^p_{qst} . Die Beziehung zwischen \mathcal{R}^p_{qst} und $\bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r$ ergibt sich aus (2.20)

$$\mathcal{R}^p_{qst} = (\mathbf{A}^{-1})^p_r A^i_q A^j_s A^m_t \bar{\mathcal{R}}_{ijm}^r \quad . \quad (2.145)$$

Es ist von Interesse die Komponenten \mathcal{R}^p_{qst} entsprechend (2.144) in Abhängigkeit von Λ^i_{jk} auszudrücken. Sicherlich kann man eine solche Darstellung durch geeignetes Einsetzen in (2.145) herleiten. Dieser Weg erweist sich jedoch als sehr aufwändig und mühsam. Daher wollen wir uns einer anderen Möglichkeit bedienen. Um genauer zu sein, betrachten wir einen Vektor $\mathbf{w} = w_i \mathbf{g}^i = \bar{w}_i \bar{\mathbf{g}}^i$ und bilden folgende Differenz von kovarianten Ableitungen (vgl. (2.50) und (2.52))

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j \bar{w}_i - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_k \bar{w}_i &= (\bar{\partial}_j \bar{w}_i - \bar{\Lambda}_{ji}^r \bar{w}_r)|_k - (\bar{\partial}_k \bar{w}_i - \bar{\Lambda}_{ki}^r \bar{w}_r)|_j \\ &= (\bar{\partial}_j \bar{\Lambda}_{ki}^r - \bar{\partial}_k \bar{\Lambda}_{ji}^r + \bar{\Lambda}_{ki}^m \bar{\Lambda}_{jm}^r - \bar{\Lambda}_{ji}^m \bar{\Lambda}_{km}^r) \bar{w}_r \\ &+ (\bar{\Lambda}_{jk}^m - \bar{\Lambda}_{kj}^m) \bar{\nabla}_m \bar{w}_i \end{aligned} \quad (2.146)$$

oder

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j \bar{w}_i - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_k \bar{w}_i = \bar{\mathcal{R}}^r_{ijk} \bar{w}_r + \bar{\mathcal{T}}^m_{jk} \bar{\nabla}_m \bar{w}_i \quad . \quad (2.147)$$

Um dieselbe Differenz relativ zur beliebigen Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ darzustellen, benötigen wir die Beziehung

$$\partial_i \partial_j (\cdot) - \partial_j \partial_i (\cdot) = \mathcal{C}^k_{ij} \partial_k (\cdot) \quad , \quad (2.148)$$

die aus der Definition (2.28) folgt. Dann findet man zunächst

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_j \nabla_k w_i &= \{ \partial_j \Lambda^r_{ki} - \partial_k \Lambda^r_{ji} + \Lambda^m_{ki} \Lambda^r_{jm} - \Lambda^m_{ji} \Lambda^r_{km} \} w_r \\ &\quad + \mathcal{C}^m_{kj} \partial_m w_i + (\Lambda^m_{jk} - \Lambda^m_{kj}) \nabla_m w_i \quad . \end{aligned} \quad (2.149)$$

Wir verwenden hier (2.121) und erhalten

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_j \nabla_k w_i &= \{ \partial_j \Lambda^r_{ki} - \partial_k \Lambda^r_{ji} + \Lambda^m_{ki} \Lambda^r_{jm} - \Lambda^m_{ji} \Lambda^r_{km} + \mathcal{C}^m_{kj} \Lambda^r_{mi} \} w_r \\ &\quad + \mathcal{T}^m_{jk} \nabla_m w_i \quad . \end{aligned} \quad (2.150)$$

Die linke Seite und der letzte Term auf der rechten Seite von (2.150) stellen jeweils einen Tensor zweiter Stufe dar. Deswegen muss auch die geschweifte Klammer auf der rechten Seite ein Tensor zweiter Stufe sein. Aus dem Vergleich zwischen (2.150) und (2.147) sieht man sofort, dass

$$\mathcal{R}^r_{ijm} = \partial_j \Lambda^r_{mi} - \partial_m \Lambda^r_{ji} + \Lambda^r_{jn} \Lambda^n_{mi} - \Lambda^r_{mn} \Lambda^n_{ji} + \mathcal{C}^n_{mj} \Lambda^r_{ni} \quad . \quad (2.151)$$

2.8 Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit

Eine Mannigfaltigkeit wird durch eine Metrik, einen Zusammenhang und einen Riemannschen Krümmungstensor charakterisiert.

Eine Euklidische Mannigfaltigkeit ist ausgerüstet mit einer Euklidischen Metrik und einem Levi-Civita-Zusammenhang, dessen Symbole im Bezug auf kartesische Koordinaten verschwinden. Deswegen verschwindet der Riemannsche Krümmungstensor identisch. Umgekehrt gilt (s. SCHOUTEN [76], S.142), dass jede Mannigfaltigkeit mit symmetrischem, metrischem Zusammenhang und verschwindendem Riemannschen Krümmungstensor eine Euklidische Mannigfaltigkeit darstellt.

In einer Mannigfaltigkeit mit verschwindendem Riemannschen Krümmungstensor ist das Ergebnis der parallelen Verschiebung eines Vektors von einem Punkt P zu einem Punkt Q unabhängig vom Weg. Man sagt auch, dass solche Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft des Tele- oder Fernparallelismus aufweisen oder, dass solche Mannigfaltigkeiten flach sind.

Eine Mannigfaltigkeit heißt Riemannisch wenn, sie mit einer Riemannschen Metrik, einem symmetrischen, metrischen Zusammenhang und einem nicht verschwindenden Riemannschen Krümmungstensor ausgestattet ist. Man sagt auch, die Mannigfaltigkeit sei gekrümmt.

In der Plastizitätstheorie kann es vorkommen, dass die Metrik Euklidisch ist, dagegen der Zusammenhang nicht metrisch und nicht symmetrisch ist. Der Riemannsche Krümmungstensor kann verschwinden oder nicht verschwinden. Solche Mannigfaltigkeiten werden allgemein als nicht Riemannsch bezeichnet.

3 Mikropolares Kontinuum - Grundlagen der Kinematik

3.1 Physikalische Motivation

Reale Materialien besitzen im Mikrobereich musterartige Strukturen mit diskret verteilter Masse. Es ist somit wichtig für die mechanischen Eigenschaften eines Punktes im materiellen Körper, das mechanische Verhalten einer ganzen Umgebung um den entsprechenden Punkt zu betrachten. Um diesen Sachverhalt mit den Mitteln der Kontinuumsmechanik zu erfassen, denken wir uns zu jedem makroskopischen materiellen Punkt ein Mikrokontinuum (Mikrostruktur) angeheftet (s. z.B. GRAMMENODIS & TSAKMAKIS [40] und die darin zitierte Literatur). Die Mikrostruktur dient der phänomenologischen Modellierung der Mikrophysik des betrachteten Körpers. Dies geschieht durch die Hypothese, dass das Mikrokontinuum in irgendeinem Sinne mechanisch äquivalent zu einer Umgebung des betrachteten Punktes des realen Materials ist. Allerdings wird die Masse im Mikrokontinuum als kontinuierlich verteilt angenommen. Insgesamt gilt Folgendes: Das Mikrokontinuum ist im Allgemeinen fiktiv, besitzt konzeptuellen Charakter und kann beliebig ausgedehnt sein. Ein *mikropolares* Kontinuum ist ein materieller Körper (Menge aus materiellen Punkten) an dessen Punkten jeweils ein Mikrokontinuum angeheftet ist, das einen starren Körper darstellt. Im folgenden werden die grundlegenden kinematischen Beziehungen und die Konzepte für das mikropolare Kontinuum vorgestellt.

3.2 Bezugs- und Momentankonfiguration

Der Vorgehensweise von GRAMMENODIS & TSAKMAKIS [40] folgend, betrachten wir einen materiellen Körper \mathcal{B} (*makroskopisches Kontinuum* oder *makroskopisches Material* oder *Makrokontinuum* oder *übergeordneter materieller Körper*) mit Elementen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$, der im dreidimensionalen Euklidischen Punktraum \mathcal{E} abgebildet werden kann. Sei P ein beliebiger Punkt aus \mathcal{E} . Ein Vektor $\mathbf{v}_P \equiv (P, \mathbf{v})$ am Punkt P ist ein am Punkt P gebundener Vektor mit $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ (\mathbb{E} : Euklidischer Vektorraum). Man bezeichnet P als Angriffspunkt und \mathbf{v} als Vektoranteil. Die Gesamtheit aller Vektoren am Punkt P spannt einen Vektorraum auf, den Tangentialvektorraum $T_P \mathcal{E}$ des Punktes P . Nach Wahl eines Ursprungs $O \in \mathcal{E}$ kann jeder Raumpunkt $P \in \mathcal{E}$ durch einen Ortsvektor $\mathbf{p}_O = (O, \mathbf{p}) \in T_O \mathcal{E}$ identifiziert werden. Es ist in der klassischen Mechanik üblich, $\mathbf{p}_O \equiv \mathbf{p}$ zu setzen und aus dem Zusammenhang zu erkennen, ob \mathbf{p}_O oder \mathbf{p} gemeint ist. Ferner setzt man \mathbf{p} gleich P und spricht von einem Punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{E}$. Wir werden diese Notati-

on im Wesentlichen befolgen und nur an einigen besonderen Stellen den genauen Sachverhalt erläutern.

Es wird nun angenommen, dass ein materieller Körper $\mathcal{B}'(\mathcal{X})$ (*Mikrokontinuum*, oder *mikroskopisches Kontinuum*, oder *Mikrostruktur*), mit Elementen $\mathcal{X}', \mathcal{Y}', \dots$, an jedem materiellen Punkt $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ angeheftet ist. Genauer genommen, ist der Körper \mathcal{B}' überall der gleiche. Das hier betrachtete Makrokontinuum entspricht dem "overall material" in Mindlin's Theorie (s. MINDLIN [72]) und ist i.A. von dem dort eingeführten "macromaterial" verschieden. Eine *Konfiguration* des Körpers \mathcal{B} und seiner Mikrostruktur \mathcal{B}' ist eine Abbildung der Form

$$(k, k') : (\mathcal{B}, \mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad , \quad (3.1)$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto \begin{pmatrix} k = k(\mathcal{X}) \\ k' = k'(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \end{pmatrix} \quad , \quad (3.2)$$

wobei $k(\mathcal{B})$, $k'(\mathcal{X}, \mathcal{B}')$ offene, einfach zusammenhängende Untermengen von \mathcal{E} sind. Wir bezeichnen $k(\mathcal{B})$ und $k'(\mathcal{X}, \mathcal{B}')$ als die Raumbereiche in \mathcal{E} unter der Konfiguration (k, k') . Wir werden auch $(k, k') \equiv (\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ schreiben und $k(\mathcal{B}) \equiv \mathbf{k}(\mathcal{B})$, $k'(\mathcal{X}, \mathcal{B}') \equiv \mathbf{k}'(\mathcal{X}, \mathcal{B}')$ setzen. Hierbei ist $\mathbf{k}(\mathcal{X})$ ein Ortsvektor relativ zum Ursprung O und $\mathbf{k}'(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ ein Ortsvektor mit $\mathbf{k}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}$ als Angriffspunkt, der zum Raumpunkt zugeordnet zu \mathcal{X}' führt. Eine fest gewählte Konfiguration (χ_R, χ'_R) heißt *Referenz-* oder *Bezugskonfiguration* von $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{X} = \chi_R(\mathcal{X}) \\ \mathbf{X}' = \chi'_R(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \end{pmatrix} \quad , \quad (3.3)$$

während eine Bewegung von $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ in $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ eine einparametrische Familie von Konfigurationen (χ, χ') ist, die mit der Zeit $t \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$, I : Intervall) parametrisiert wird

$$(\chi, \chi') : \mathcal{B} \times \mathcal{B}' \times I \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad , \quad (3.4)$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \chi(\mathcal{X}, t) \\ \mathbf{x}' = \chi'(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) \end{pmatrix} \quad . \quad (3.5)$$

Wie üblich wird für $t = \text{fest}$ angenommen, dass die Funktion (χ, χ') eine Inverse besitzt, so dass $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ durch \mathbf{x}, \mathbf{x}' ausgedrückt werden können. Im Falle, dass die Bewegung von $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ zur Zeit t_0 startet, bezeichnet man $(\chi(\cdot, t_0), \chi'(\cdot, \cdot, t_0))$ als *Anfangskonfiguration*. Entsprechend bezeichnet man $(\chi(\cdot, t), \chi'(\cdot, \cdot, t))$ auch als *aktuelle* oder *Momentan-* oder *Eulersche Konfiguration*. In dieser Arbeit wird die Anfangskonfiguration als Bezugskonfiguration genommen:

$$\mathbf{X} = \chi(\mathcal{X}, t_0) \equiv \chi_R(\mathcal{X}) \quad , \quad (3.6)$$

$$\mathbf{X}' = \chi'(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t_0) \equiv \chi'_R(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \quad . \quad (3.7)$$

Alle Konfigurationen, die sich von der Bezugskonfiguration unterscheiden, werden räumliche Konfigurationen genannt. Ferner wird vorausgesetzt, dass für $t = \text{fest}$ alle Inversen existieren. Damit kann die Bewegung mit Hilfe von \mathbf{X}, \mathbf{X}' beschrieben werden. Um viele Notationssymbole zu vermeiden, werden wir dieselben Bezeichnungen für die Bewegung in Abhängigkeit von \mathbf{X}, \mathbf{X}' , wie in (3.5) benutzen:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{x}' = \chi'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \end{pmatrix} \quad . \quad (3.8)$$

Wir werden weiterhin

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.9)$$

für den *makroskopischen Verschiebungsvektor* schreiben. Im Allgemeinen ist $\mathbf{X} \in T_O \mathcal{E}$ und $\mathbf{x} \in T_o \mathcal{E}$, wobei $o \in \mathcal{E}$ ein zweiter Ursprung in \mathcal{E} ist. Wenn jedoch nichts anderes gesagt wird, werden wir $o \equiv O$ setzen. Wir werden mit folgenden Raumbereichen arbeiten: $R_R := \chi_R(\mathcal{B})$, $R_t := \chi(\mathcal{B}, t)$, $R'_R(\mathbf{X}) := \chi'_R(\mathcal{X}, \mathcal{B}')$, $R'_t := \chi'(\mathcal{X}, \mathcal{B}', t)$. Die Funktionen (χ, χ') in (3.8) heißen *Deformation* von der Bezugs- auf die Momentankonfiguration.

Die Verwendung von Mikrostrukturen in der Kontinuumsmechanik geht auf MINDLIN [72] und ERINGEN (s. z.B. [31]) zurück. In unserem Fall ist das Mikrokontinuum fiktiv bzw. konzeptuell und kann beliebige Abmessungen (s. Abbildung 3.1) aufweisen. Insbesondere braucht der Raumbereich des jeweiligen Mikrokontinuums nicht im Raumbereich des Makrokontinuums enthalten zu sein. Wie schon in Abschnitt 3.1 erwähnt wurde, führt das Mikrokontinuum in einem mikropolaren Material nur Starrkörperbewegungen durch.

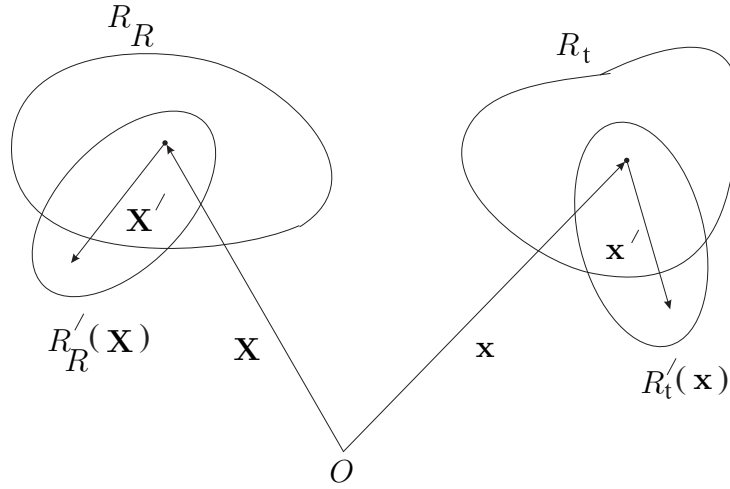


Abbildung 3.1: Der Raumbereich $R'_R(\mathbf{X})$ (bzw. $R'_t(\mathbf{x})$) braucht nicht Teilmenge von R_R (bzw. R_t) zu sein.

3.3 Makro- und Mikrodeformationsgradient

Die Deformation des Makrokontinuums kann durch den Gradient

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} := \text{GRAD } \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.10)$$

charakterisiert werden. Im Weiteren unterscheiden wir zwischen dem Gradientenoperator GRAD, der sich auf \mathbf{X} in R_R bezieht und dem Gradientenoperator grad, der sich auf \mathbf{x} in R_t bezieht.

In der klassischen Mechanik wird nicht explizit Rücksicht auf den Angriffspunkt von Vektoren genommen und $\text{GRAD}\chi$ wird als lineare Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, mit $\mathbf{F} = \text{GRAD}\chi$ angesehen, so dass in linearer Näherung

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) [\mathbf{X} - \mathbf{X}_0] \quad , \quad (3.11)$$

mit $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}_0, t)$ und $\mathbf{X}_0 \in R_R$ gilt. In einer differentialgeometrischen Betrachtung ist \mathbf{F} das Tangential der Punktabbildung χ , d.h. \mathbf{F} ist eine Abbildung der Form

$$\mathbf{F} : TR_R \rightarrow TR_t \quad . \quad (3.12)$$

Man schreibt TR_R bzw. TR_t für das *Tangentialbündel* von R_R bzw. R_t :

$$TR_R := \bigcup_{\mathbf{x} \in R_R} T_{\mathbf{x}} R_R \quad , \quad TR_t := \bigcup_{\mathbf{x} \in R_t} T_{\mathbf{x}} R_t \quad . \quad (3.13)$$

Wir werden \mathbf{F} als *Deformationsgradient* der makroskopischen Bewegung oder einfach *Makrodeformationsgradient* bezeichnen. $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ist daher ein Zweipunktensor, der auf einen Vektor $(\mathbf{X}, \mathbf{W}) \in T_{\mathbf{X}} R_R$ wirkt und einen Vektor $(\mathbf{x}, (\text{GRAD}\chi)[\mathbf{W}]) \in T_{\mathbf{x}} R_t$ liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}} R_R &\rightarrow T_{\mathbf{x}} R_t \quad , \\ (\mathbf{X}, \mathbf{W}) &\mapsto \mathbf{F}[\mathbf{X}, \mathbf{W}] = (\mathbf{x}, (\text{GRAD}\chi)[\mathbf{W}]) \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ganz allgemein besteht ein Zweipunktensor aus zwei Anteilen. Der erste bezieht sich auf die Punktabbildung, d.h. die Verschiebung des Angriffspunktes des Vektors. Der zweite Anteil ist die lineare Abbildung, die auf gewöhnliche Vektoren in \mathbb{E} wirkt und durch $\text{GRAD}\chi$ für \mathbf{F} gegeben ist. Die Entwicklung (3.11) wird dann folgendermaßen verstanden: Die Ortsvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0$ sind am Ursprung O gebunden und es gilt $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in T_O \mathcal{E}$ bzw. $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \in T_O \mathcal{E}$. Sei $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0}$ ein Shifter

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} : T_{\mathbf{x}_0} R_t &\rightarrow T_O \mathcal{E} \quad , \\ (\mathbf{x}_0, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{S}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{x}_0, \mathbf{w}] := (O, \mathbf{w}) \quad . \end{aligned} \quad (3.15)$$

In Worten: $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0}$ schiebt den Angriffspunkt von \mathbf{x}_0 zu O und läßt den Vektoranteil unverändert. Man merke, dass Shifter orthogonale Abbildungen sind (vgl. MARSDEN & HUGHES [67], Sect. 1.3). Analogerweise definiert man einen Shifter

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{X}_0} : T_{\mathbf{X}_0} R_R &\rightarrow T_O \mathcal{E} \quad , \\ (\mathbf{X}_0, \mathbf{W}) &\mapsto \mathbf{S}_{\mathbf{X}_0}[\mathbf{X}_0, \mathbf{W}] := (O, \mathbf{W}) \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ausgedrückt in Termen mit gebundenen Vektoren lautet dann (3.11)

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0}^{-1}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) \mathbf{S}_{\mathbf{X}_0}^{-1}[\mathbf{X} - \mathbf{X}_0] \quad , \quad (3.17)$$

bzw.

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) \mathbf{S}_{\mathbf{X}_0}^{-1}) [\mathbf{X} - \mathbf{X}_0] \quad . \quad (3.18)$$

Wie schon erwähnt, ist es üblich in der klassischen Kontinuumsmechanik den linearen Anteil eines Tensors Ψ auch mit Ψ zu bezeichnen. Wir werden weitgehend die klassische Notation benutzen und nur an einigen Stellen die differentialgeometrischen Zusammenhänge erläutern.

Bekannterweise transformiert sich \mathbf{F} unter überlagerten Starrkörperrotationen \mathbf{Q} auf die Momentankonfiguration gemäß

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad . \quad (3.19)$$

Der *rechte Cauchy-Green-Deformationstensor* \mathbf{C} und der *linke Cauchy-Green-Deformationstensor* \mathbf{B} sind durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.20)$$

gegeben. Die Tensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} heißen jeweils die *rechte* und die *linke Streckung* und sind jeweils symmetrisch und positiv definit. Beide kommen in der *polaren Zerlegung* von \mathbf{F} vor

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad , \quad (3.21)$$

wobei \mathbf{R} einen eigentlich orthogonalen Tensor darstellt. \mathbf{R} repräsentiert eine Rotation. Oft wird \mathbf{R} als *materielle Rotation* bezeichnet. Im Unterschied zu $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ist $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ ein Endomorphismus, d.h.

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}} R_R \rightarrow T_{\mathbf{X}} R_R \quad . \quad (3.22)$$

Es folgt unmittelbar daraus, dass $\mathbf{R}(\mathbf{X}, t)$ einen Zweipunktstensor (vgl. MARSDEN & HUGHES [67], S.51)

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}} R_R \rightarrow T_{\mathbf{x}} R_t \quad , \quad (3.23)$$

und $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ einen Endomorphismus

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{x}} R_t \rightarrow T_{\mathbf{x}} R_t \quad (3.24)$$

darstellen. Anders als beim Makrodeformationsgradient \mathbf{F} brauchen die Felder $\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ keine Kompatibilitätsbedingungen zu erfüllen, d.h. sie stellen i.A. keine Gradienten dar. Wir sagen auch, dass $\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ *inkompatible* oder *lokale* Deformationen beschreiben (s. dazu GRAMMENOU-DIS & TSAKMAKIS [40] und die darin zitierte Literatur). Demnach beschreibt \mathbf{F} eine *kompatible* bzw. *globale* Deformation von der Bezugs- auf die Momentankonfiguration.

Mit \mathbf{F} wird auch der (makroskopische) räumliche *Geschwindigkeitsgradient* \mathbf{L} ausgedrückt

$$\mathbf{L} = \text{grad} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad , \quad (3.25)$$

wobei \mathbf{D} die (makroskopische) *Eulersche Deformationsgeschwindigkeit* und \mathbf{W} den (makroskopischen) *Wirbel-* oder *materiellen Spintensor* bedeuten.

Analog zu (3.10) wird die Deformation des Mikrokontinuums durch die *mikroskopische Rotation* oder *mikropolare Rotation* oder *Mikrorotation*

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{X}'} \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{R}}^{-1} \quad , \quad \det \bar{\mathbf{R}} = 1 \quad (3.26)$$

charakterisiert. Man merke: $\bar{\mathbf{R}}$ ist homogen über $R'_R(\mathbf{X})$ verteilt, so dass $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t)$ als Abbildung von $T_{\mathbf{X}} R'_R(\mathbf{X})$ auf $T_{\mathbf{x}} R'_t(\mathbf{x})$ für beliebige \mathbf{X}' gedacht werden kann. Insbesondere gilt

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}} R'_R(\mathbf{X}) \equiv T_{\mathbf{X}} R_R \rightarrow T_{\mathbf{x}} R'_t(\mathbf{x}) \equiv T_{\mathbf{x}} R_t \quad , \quad (3.27)$$

wovon wir öfters Gebrauch machen werden.

An dieser Stelle wird folgendes bemerkt: Sei $\mathbf{A} \in T_{\mathbf{X}} R_R$ ein Lagrangesches Vektorfeld und $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{R}}\mathbf{A} \in T_{\mathbf{x}} R_t$ das Eulersche Gegenstück davon. Seien ferner \mathbf{a}, \mathbf{A} jeweils objektive Felder, d.h. unter überlagerten Starrkörperrotationen \mathbf{Q} auf die Momentankonfiguration, transformieren sich \mathbf{a}, \mathbf{A} gemäß $\mathbf{a}^* = \mathbf{Q}\mathbf{a} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}\mathbf{A} = \bar{\mathbf{R}}^*\mathbf{A}^*$, mit $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Dann folgt

$$\bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}^* = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (3.28)$$

ERINGEN & KAFADAR [33] und STEINMANN [81] folgend benutzen wir $\bar{\mathbf{R}}$, um den Deformationsgradient \mathbf{F} multiplikativ gemäß

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}} \quad (3.29)$$

zu zerlegen. Im Gegensatz zum linken und rechten Strecktensor aus der polaren Zerlegung (3.21) sind die Tensoren $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ nicht symmetrisch. Aus (3.14) und (3.27) sieht man sofort, dass $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t)$ und $\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t)$ jeweils als Endomorphismen von $T_{\mathbf{X}} R_R$ auf $T_{\mathbf{X}} R_R$ und von $T_{\mathbf{x}} R_t$ auf $T_{\mathbf{x}} R_t$ zu verstehen sind. In Anlehnung an ERINGEN (s. z.B. [32], S.24) nennen wir

$$\boldsymbol{\Omega} := \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T = -\boldsymbol{\Omega}^T \quad (3.30)$$

den *microgyration tensor*. Für den axialen Vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega^n \mathbf{e}_n$ des antisymmetrischen Tensors

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.31)$$

gilt

$$\Omega^{ij} = e_{jim} \omega^m \quad , \quad (3.32)$$

wobei $\{\mathbf{e}_i\}$ eine orthonormale Basis bedeutet. Die Funktion der Deformation kann mit Hilfe von $\bar{\mathbf{R}}$ wie folgt spezialisiert werden. Die Starrkörperbewegung des Mikrokontinuums wird durch die Angabe der Bewegung dreier nichtkomplanarer materieller Punkte \mathcal{X}'_i , $i=1,2,3$ eindeutig festgelegt. Zur Zeit $t = t_0$ führen vom Raumpunkt \mathbf{X} die Ortsvektoren $\boldsymbol{\Phi}_i \equiv \mathbf{X}'_i$ zu den materiellen Punkten \mathcal{X}'_i . Alle Informationen der Vorschrift (3.3) lassen sich also durch die Abbildung

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{\chi}'_R(\mathcal{X}, \mathcal{X}'_i) \quad (3.33)$$

erfassen. Zum Zeitpunkt t führen zu den materiellen Punkten \mathcal{X}'_i , von \mathbf{x} aus gesehen, die Ortsvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Phi}_i, t) = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\Phi}_i \quad . \quad (3.34)$$

Die Deformation (3.8) lässt sich somit äquivalenterweise durch die Abbildung

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad (3.35)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\Phi}_i \quad (3.36)$$

ausdrücken. Im Folgenden nehmen wir an, dass $\boldsymbol{\Phi}_i$ als Feld $\boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{X})$ vorliegt. Damit wird dann durch die Abbildungen (3.35) und (3.36) eine Deformation von der Bezugs- auf die Momentankonfiguration reflektiert.

3.4 Differentialoperatoren

3.4.1 Koordinaten-Systeme

Das folgende Kapitel gibt im Wesentlichen die Ausführungen in GRAMMENOUDES & TSAKMAKIS [40] wieder.

Es sei an dieser Stelle noch an folgenden Sachverhalt erinnert. Der Tangentialvektorraum eines beliebigen Punktes in einer beliebigen Konfiguration ist per Definition ein Euklidischer Vektorraum. Das Euklidische skalare Produkt in diesem Vektorraum wird mit einem Punkt bezeichnet. In jedem Tangentialvektorraum kann (lokal) immer ein orthonormales Basissystem gefunden werden in Bezug auf dessen die Komponenten des Metriktensors durch das Kronecker Delta gegeben werden. Sind diese Basisvektoren gleichzeitig Koordinatenbasisvektoren eines globalen Koordinatensystems, dann bildet das Kronecker Delta überall die Metrikoeffizienten für die Mannigfaltigkeit. Der Metriktensor der Mannigfaltigkeit ist dann (überall) der Einheitstensor und die Mannigfaltigkeit ist Euklidisch. Tritt dieser Fall nicht ein, sind die Tangentialvektorräume immer noch Euklidisch, die Mannigfaltigkeit jedoch nicht. Sie besitzt einen Metriktensor, der sich i.A. vom Einheitstensor unterscheidet. Anders ausgedrückt, kann keine Koordinatentransformation gefunden werden, die zu einem Koordinatensystem führt, in dem die Metrikoeffizienten Kronecker Delta's sind. Jedoch werden Komponenten tensorieller Größen mit Hilfe des Euklidischen skalaren Produkts weiter angegeben, welches in den Tangentialvektorräumen der Mannigfaltigkeit stets gilt.

In der Kontinuumsmechanik wird vorausgesetzt, dass sowohl R_R als auch R_t Euklidische Mannigfaltigkeiten bilden und somit mit Koordinatenlinien überzogen werden können. Für unsere Zwecke reicht es aus, die Annahme zu treffen, dass jeweils ein Koordinatensystem ausreicht, um die Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Es ist zweckmäßig ein kartesisches Koordinatensystem $\{X^A\}$ in der Bezugskonfiguration R_R und ein kartesisches Koordinatensystem $\{x^i\}$ in der Momentankonfiguration R_t auszuwählen. Diese induzieren jeweils die orthonormalen Koordinatenbasen $\{\mathbf{E}^A\}$, mit $\mathbf{E}^A \equiv \mathbf{E}_A$ und $\{\mathbf{e}_i\}$, mit $\mathbf{e}^i \equiv \mathbf{e}_i$, so dass

$$\mathbf{E}^A \cdot \mathbf{E}_B = \delta^A_B \quad , \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j \quad (3.37)$$

gilt. Große lateinische und kleine lateinische Indizes beziehen sich jeweils auf R_R und R_t . Man kann sich sowohl $\{X^A\}$ als auch $\{x^i\}$ über den ganzen Raum \mathcal{E} erstreckt denken und die Ortsvektoren \mathbf{X}, \mathbf{x} durch $\mathbf{X} = X^A \mathbf{E}_A$ und $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ darstellen.

Es ist ferner zweckmäßig neben dem Basissystem $\{\mathbf{E}_A\}$ ein weiteres orthonormales Basissystem $\{\tilde{\mathbf{E}}_A\}$ in der Bezugskonfiguration R_R zu verwenden, definiert durch

$$\tilde{\mathbf{E}}_A \equiv \tilde{\mathbf{E}}^A := \delta^A_i \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{e}_i \quad . \quad (3.38)$$

In solchen Beziehungen wird von Notationen der Form

$$\alpha^i = \delta^i_A \alpha^A \quad (3.39)$$

Gebrauch gemacht, wobei α^i eine beliebige indizierte Größe darstellt. Für den Makrodeformationsgradient \mathbf{F} und die Mikrorotation $\bar{\mathbf{R}}$ ergeben sich dann folgende Darstellungen:

$$\mathbf{F} = F^i{}_A \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A \quad , \quad F^i{}_A := \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \quad , \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^A{}_i \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad (\mathbf{F}^{-1})^A{}_i = \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \quad , \quad (3.41)$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{R}^i{}_A \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}^{-1} = (\bar{\mathbf{R}}^{-1})^A{}_i \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{e}^i, \quad \text{mit} \quad \bar{R}^i{}_A = (\bar{\mathbf{R}}^{-1})^A{}_i \quad . \quad (3.42)$$

Für ein Vektorfeld

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad (3.43)$$

mit Werten aus TR_R oder TR_t , oder aus dem Tangentialbündel einer weiteren Konfiguration erhalten wir einerseits

$$\text{GRAD}\mathbf{b} \equiv \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A \quad (3.44)$$

und andererseits

$$\text{grad}\mathbf{b} \equiv \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) \bar{\mathbf{R}}^T \quad . \quad (3.45)$$

3.4.2 Relativer Gradient

Wichtig für das Nachfolgende sind die Begriffe des relativen Gradienten und der relativen kovarianten Ableitung. Der erste Begriff wurde von NOLL [74] eingeführt und wurde als relative kovariante Ableitung von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [40] verallgemeinert. In diesem und dem nächsten Abschnitt werden die wesentlichen Aspekte der Ausführungen aus GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [40] zusammengefasst.

Betrachte eine lineare Abbildung der Form

$$\Psi : TR_R \rightarrow TR_t \quad , \quad \Psi(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}}R_R \rightarrow T_{\mathbf{X}}R_t \quad . \quad (3.46)$$

Wir sagen, Ψ ist ein Deformationsfeld von der Bezugs- auf die Momentankonfiguration, wenn $\Psi(\mathbf{X})$ eine lokale Deformation in \mathbf{X} induziert. Erfüllt Ψ keine Kompatibilitätsbedingungen, so sagen wir, dass Ψ ein inkompatibles oder lokales Deformationsfeld darstellt. Demnach ist der Makrodeformationsgradient \mathbf{F} ein kompatibles oder globales Deformationsfeld und $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ erzeugt für jedes \mathbf{X} eine lokale Deformation zu der eine globale Deformationsfunktion $\chi(\mathbf{X}, t)$ existiert. Dagegen ist die materielle Rotation \mathbf{R} ein inkompatibles Deformationsfeld von der Bezugs- auf die Momentankonfiguration. Man kann nun diese Definition sinngemäß auf beliebige Konfigurationen verallgemeinern, indem man TR_R und TR_t oder $T_{\mathbf{X}}R_R$ und $T_{\mathbf{X}}R_t$ in (3.46)

durch das Tangentialbündel beliebiger Konfigurationen ersetzt. In diesem Sinne sind \mathbf{U}, \mathbf{V} inkompatible Deformationsfelder jeweils von der Bezugs- auf die Bezugskonfiguration und von der Momentan- auf die Momentankonfiguration. Sei zunächst Ψ ein inkompatibles Deformationsfeld wie in (3.46) definiert. Sei ferner \mathbf{b} ein Eulersches Vektorfeld

$$\mathbf{b} : R_t \rightarrow TR_t \quad , \quad (3.47)$$

so dass wegen (3.44) und (3.45)

$$\text{grad} \mathbf{b} = (\text{GRAD} \mathbf{b}) \mathbf{F}^{-1} \quad (3.48)$$

gilt. In Anlehnung an NOLL [74] wird der Gradient von \mathbf{b} relativ zu Ψ (*relativer Gradient*) durch

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} := (\text{GRAD} \mathbf{b}) \Psi^{-1} \quad (3.49)$$

definiert. Auf eine äquivalente Formulierung kommt man nach Einführung einer beliebigen Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$ in R_t durch

$$(\mathbf{g}_{\Psi})_i := \delta^A_i (\Psi \mathbf{E}_A) \quad , \quad (\mathbf{g}_{\Psi})^i := \delta^i_A (\Psi^{T-1} \mathbf{E}^A) \quad . \quad (3.50)$$

Dann folgt aus (3.49)

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A \right) \Psi^{-1} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^i} \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i \quad . \quad (3.51)$$

Um eine Komponentendarstellung des relativen Gradienten $\nabla_{\Psi} \mathbf{b}$ in Bezug auf die Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$ zu erhalten, setzen wir

$$\mathbf{b} = b^m (\mathbf{g}_{\Psi})_m \quad , \quad (3.52)$$

$$\Psi = \Psi^i_A \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A \quad , \quad (3.53)$$

$$\Psi^{-1} = (\Psi^{-1})^A_i \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{e}^i \quad . \quad (3.54)$$

Es ist

$$(\mathbf{g}_{\Psi})_m = \delta^A_m \Psi^j_A \mathbf{e}_j \quad , \quad \mathbf{e}_j = \delta^i_A (\Psi^{-1})^A_j (\mathbf{g}_{\Psi})_i \quad , \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{g}_{\Psi})_m}{\partial X^i} = \delta^j_B (\Psi^{-1})^B_n \frac{\partial \Psi^n_A}{\partial X^i} \delta^A_m (\mathbf{g}_{\Psi})_j \quad , \quad (3.56)$$

und aus (3.51) wird

$$\begin{aligned} \nabla_{\Psi} \mathbf{b} &= \frac{\partial b^m}{\partial X^i} (\mathbf{g}_{\Psi})_m \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i + b^m \frac{\partial (\mathbf{g}_{\Psi})_m}{\partial X^i} \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i \\ &= \frac{\partial b^m}{\partial X^i} (\mathbf{g}_{\Psi})_m \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i + b^m \delta^j_B (\Psi^{-1})^B_n \frac{\partial \Psi^n_A}{\partial X^i} \delta^A_m (\mathbf{g}_{\Psi})_j \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i \quad . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Daraus folgt

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \left(\frac{\partial b^j}{\partial X^i} + (\Lambda_{\Psi})^j_{im} b^m \right) (\mathbf{g}_{\Psi})_j \otimes (\mathbf{g}_{\Psi})^i \quad , \quad (3.58)$$

mit

$$(\mathbf{\Lambda}_{\Psi})^j_{im} := \delta^j_B (\Psi^{-1})^B_n \frac{\partial \Psi^n_A}{\partial X^i} \delta^A_m \quad (3.59)$$

in Bezug auf die Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$.

An dieser Stelle werden drei wichtige Bemerkungen gemacht. Erstens ist die Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$ anholonom. Die Anholonomie Objekte $(\mathbf{C}_{\Psi})^s_{rm}$ für die Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$ lauten (vgl. (2.62) und (3.55))

$$(\mathbf{C}_{\Psi})^s_{rm} = \delta^s_B (\Psi^{-1})^B_k \left(\Psi^n_A \delta^A_r \frac{\partial \Psi^k_C}{\partial x^n} \delta^C_m - \Psi^n_D \delta^D_m \frac{\partial \Psi^k_E}{\partial x^n} \delta^E_r \right) \quad (3.60)$$

Zweitens ist die Definition des Gradienten relativ zu Ψ zunächst in Bezug auf eine Abbildung Ψ eingeführt, die einen Zweipunktstensor darstellt. Dies kann aber sinngemäß auf beliebige inkompatible Deformationsfelder bzw. auf Kompositionen von inkompatiblen Deformationsfeldern verallgemeinert werden. Das Vektorfeld kann dabei auf die Momentan-, die Bezugs- oder eine räumliche Konfiguration definiert sein. So wird z.B. der Gradient des Vektorfeldes \mathbf{b} in (3.43) relativ zu \mathbf{U} durch

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b} := (\text{GRAD} \mathbf{b}) \mathbf{U}^{-1} \quad (3.61)$$

definiert. Auf der anderen Seite folgt aus (3.48)

$$(\text{GRAD} \mathbf{b}) = (\text{grad} \mathbf{b}) \mathbf{F} \quad (3.62)$$

und dies kann als Grundlage für die Definition von relativen Gradienten in Bezug auf den Operator "grad" dienen. Zum Beispiel kann der Gradient von \mathbf{b} relativ zu \mathbf{V} durch

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{V}} \mathbf{b} := (\text{grad} \mathbf{b}) \mathbf{V} \quad (3.63)$$

definiert werden. Mit

$$\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{b} := (\text{GRAD} \mathbf{b}) \mathbf{R}^{-1} \quad (3.64)$$

folgt dann die Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{b} = \bar{\nabla}_{\mathbf{V}} \mathbf{b} \quad (3.65)$$

Außerdem sieht man aus (3.62) und (3.45), dass

$$(\text{GRAD} \mathbf{b}) \bar{\mathbf{U}}^{-1} = (\text{grad} \mathbf{b}) \bar{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \quad (3.66)$$

gilt.

Drittens stellen Gradienten relativ zu inkompatiblen Deformationsfeldern keine kovarianten Ableitungen für die betrachtete Mannigfaltigkeit dar. Man kann dies anhand von (3.49) bzw. (3.58) für Ψ aus (3.46) für die Mannigfaltigkeit R_t demonstrieren. Durch einen Vergleich mit (3.58) wird man feststellen, dass die Eigenschaft 3) in der Definition der kovarianten Ableitung

(s. (2.34)) nicht erfüllt wird. Im Übrigen hätte $\nabla_{\Psi} \mathbf{b}$ eine kovariante Ableitung für R_t dargestellt, so müsste an der Stelle von $\frac{\partial b^j}{\partial X^i}$ beispielsweise $\delta^A_i \Psi^n_A (\mathbf{F}^{-1})^B_n \frac{\partial b^j}{\partial X^B}$ stehen. Deswegen bilden auch die Größen $(\Lambda_{\Psi})^j_{im}$ keine Objekte eines Zusammenhangs für R_t in Bezug auf die Basis $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$. Es stellt sich daher die Frage, wie sich die Objekte $(\Lambda_{\Psi})^j_{im}$ bei einem Wechsel des Basissystems verhalten. Das Transformationsverhalten der Größen $(\Lambda_{\Psi})^j_{im}$ bei einem Wechsel des Basissystems $\{(\mathbf{g}_{\Psi})_i\}$ kann wie folgt hergeleitet werden:

Sei $\{(\mathbf{g}_{\Psi}^*)\}$ eine neue beliebige anholonome Basis mit

$$(\mathbf{g}_{\Psi}^*)_i = A^l_i (\mathbf{g}_{\Psi})_l \quad , \quad (\mathbf{g}_{\Psi}^*)^i = (A^{-1})^i_l (\mathbf{g}_{\Psi})^l \quad . \quad (3.67)$$

Aus (3.50) folgt einerseits

$$(\mathbf{g}_{\Psi}^*)_i = A^l_i \delta^A_l (\Psi \mathbf{E}_A) = \delta^A_i (\Psi \mathbf{E}_A^*) \quad , \quad (3.68)$$

$$\mathbf{E}_A^* := A^B_A \mathbf{E}_B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_A = (A^{-1})^B_A \mathbf{E}_B^* \quad , \quad (3.69)$$

und andererseits

$$(\mathbf{g}_{\Psi}^*)^i = (A^{-1})^i_l \delta^l_A (\Psi^{T-1} \mathbf{E}^A) = \delta^i_A (\Psi^{T-1} \mathbf{E}^{*A}) \quad , \quad (3.70)$$

$$\mathbf{E}^{*A} := (A^{-1})^A_B \mathbf{E}^B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}^A = A^A_B \mathbf{E}^{*B} \quad . \quad (3.71)$$

Es sei angemerkt, dass $\{\mathbf{E}_A^*\}$ nicht mehr eine orthonormale Basis zu sein braucht und anholonom sein kann. Damit ergibt sich aus (3.51)

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A \right) \Psi^{-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^A} \otimes A^A_B \mathbf{E}^{*B} \right) \Psi^{-1} \quad . \quad (3.72)$$

Mit der Definition

$$\partial^*_B(\cdot) := A^A_B \frac{\partial(\cdot)}{\partial X^A} \quad \text{bzw.} \quad \partial^*_i(\cdot) := A^j_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial X^j} \quad , \quad (3.73)$$

erhalten wir dann

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \partial^*_B \mathbf{b} \otimes \Psi^{T-1} \mathbf{E}^{*B} \equiv \partial^*_i \mathbf{b} \otimes (\mathbf{g}_{\Psi}^*)^i \quad . \quad (3.74)$$

Für den Vektor \mathbf{b} in (3.52) gilt

$$\mathbf{b} = b^{*m} (\mathbf{g}_{\Psi}^*)_m \quad (3.75)$$

und daher

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \{(\partial^*_i b^{*m})(\mathbf{g}_{\Psi}^*)_m + b^{*m} \partial^*_i (\mathbf{g}_{\Psi}^*)_m\} \otimes (\mathbf{g}_{\Psi}^*)^i \quad . \quad (3.76)$$

Um die Ableitung $\partial^*_i (\mathbf{g}_{\Psi}^*)_m$ ausrechnen zu können, wird (3.53) in (3.68) eingesetzt:

$$(\mathbf{g}_{\Psi}^*)_m = \Psi^j_A \delta^A_l A^l_m \mathbf{e}_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_j = (A^{-1})^n_m \delta^m_A (\Psi^{-1})^A_j (\mathbf{g}_{\Psi}^*)_n \quad . \quad (3.77)$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \partial_i^* (\mathbf{g}_\Psi^*)_m &= \delta^A_l A^l_m (\partial_i^* \Psi^j_A) \mathbf{e}_j + \delta^A_l (\partial_i^* A^l_m) \Psi^j_A \mathbf{e}_j \\
 &= \delta^A_l A^l_m (\partial_i^* \Psi^j_A) (A^{-1})^n_k \delta^k_B (\Psi^{-1})^B_j (\mathbf{g}_\Psi^*)_n \\
 &\quad + \delta^A_l (\partial_i^* A^l_m) \Psi^j_A (A^{-1})^n_k \delta^k_B (\Psi^{-1})^B_j (\mathbf{g}_\Psi^*)_n \\
 &= \left\{ \delta^B_l A^l_m (A^{-1})^n_r \delta^r_A A^c_i (\Psi^{-1})^A_j \frac{\partial \Psi^j_B}{\partial X^c} + (A^{-1})^n_r (\partial_i^* A^r_m) \right\} (\mathbf{g}_\Psi^*)_n \\
 &= \left\{ (A^{-1})^n_s A^r_m A^k_i (\mathbf{\Lambda}_\Psi)^s_{kr} + (A^{-1})^n_r \partial_i^* A^r_m \right\} (\mathbf{g}_\Psi^*)_n
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

und aus (3.76) wird schließlich

$$\nabla_\Psi \mathbf{b} = \{ \partial_i^* b^{*n} + [(A^{-1})^n_s A^k_i A^r_m (\mathbf{\Lambda}_\Psi)^s_{kr} + (A^{-1})^n_r \partial_i^* A^r_m] b^{*m} \} (\mathbf{g}_\Psi^*)_n \otimes (\mathbf{g}_\Psi^*)_i, \tag{3.79}$$

oder

$$\nabla_\Psi \mathbf{b} = \{ \partial_i^* b^{*n} + (\mathbf{\Lambda}_\Psi^*)^n_{im} b^{*m} \} (\mathbf{g}_\Psi^*)_n \otimes (\mathbf{g}_\Psi^*)_i, \tag{3.80}$$

mit

$$(\mathbf{\Lambda}_\Psi^*)^n_{im} = (A^{-1})^n_s A^k_i A^r_m (\mathbf{\Lambda}_\Psi)^s_{kr} + (A^{-1})^n_r A^j_i \frac{\partial A^r_m}{\partial X^j}. \tag{3.81}$$

Ein Vergleich zwischen (3.81) und (2.61) macht deutlich, dass $(\mathbf{\Lambda}_\Psi)^s_{kr}$ keine Objekte eines Zusammenhanges für R_t sind, auf Grund des Termes $\frac{\partial A^r_m}{\partial X^j}$ auf der rechten Seite von (3.81). Wäre anstelle dieses Terms in (3.81) ein Ausdruck beispielsweise von der Form $\delta^A_j \delta^l_B \Psi^n_A (\mathbf{F}^{-1})^B_n \frac{\partial A^r_m}{\partial X^l}$, so würde $(\mathbf{\Lambda}_\Psi)^s_{kr}$ einen Zusammenhang für R_t in Bezug auf die Basis $\{(\mathbf{g}_\Psi)_i\}$ beschreiben.

3.4.3 Kovariante Ableitungen in Verbindung zu inkompatiblen Deformationen

Im letzten Abschnitt stellten wir fest, dass der Gradient $\nabla_\Psi \mathbf{b}$ relativ zu einem inkompatiblen Deformationsfeld Ψ keine kovariante Ableitung in R_t einführt. Nichtsdestotrotz gibt es mehrere Möglichkeiten, eine kovariante Ableitung in Verbindung zu $\nabla_\Psi \mathbf{b}$ zu bringen. Schon bei der Definition (3.49) sieht man, dass $\nabla_\Psi \mathbf{b}$ in direkter Verbindung zum $\text{GRAD} \mathbf{b}$ steht, der eine kovariante Ableitung in R_R definiert. Eine weitere Möglichkeit, eine Verbindung zwischen dem relativen Gradienten $\nabla_\Psi \mathbf{b}$ und einer kovarianten Ableitung herzustellen, werden wir in diesem Abschnitt dadurch ausarbeiten, dass wir (3.49) etwas anders schreiben. Sei dazu

$$\mathbf{B} : R_R \rightarrow \text{TR}_R \tag{3.82}$$

ein Lagrangesches Vektorfeld, das durch "Pull-Back-Transformation" durch Ψ aus dem Eulerschen Vektorfeld \mathbf{b} hervorgeht

$$\mathbf{B} := \Psi^{-1} \mathbf{b} = b^A \mathbf{E}_A. \tag{3.83}$$

Dabei wurde von den Gleichungen (3.50), (3.52) - (3.54) und der Beziehung $b^A = \delta^A_i b^i$ Gebrauch gemacht. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{\Psi} \mathbf{b} &= (\text{GRAD} \mathbf{b}) \Psi^{-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A \right) \Psi^{-1} \\ &= \Psi \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A + \Psi^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial X^A} \mathbf{B} \otimes \mathbf{E}^A \right) \Psi^{-1} \\ &= \Psi \left\{ \left(\frac{\partial b^C}{\partial X^A} + (\Lambda_{\Psi})^C_{AD} b^D \right) \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^A \right\} \Psi^{-1} \quad ,\end{aligned}\tag{3.84}$$

mit $(\Lambda_{\Psi})^C_{AD}$ wie in (3.59) definiert:

$$(\Lambda_{\Psi})^C_{AD} = (\Psi^{-1})^C_n \frac{\partial \Psi^n_D}{\partial X^A} \quad .\tag{3.85}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer in Gleichung (3.84) stellt eine kovariante Ableitung für \mathbf{B} dar, mit Objekten des Zusammenhangs gegeben in Gleichung (3.85). Führt man die Definition

$$\tilde{\nabla}_{\Psi} \mathbf{B} := \left(\frac{\partial b^C}{\partial X^A} + (\Lambda_{\Psi})^C_{AD} b^D \right) \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^A \quad ,\tag{3.86}$$

ein, so sieht man aus (3.84), dass

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \Psi (\tilde{\nabla}_{\Psi} \mathbf{B}) \Psi^{-1}\tag{3.87}$$

gilt. Diese Gleichung besagt, dass $\nabla_{\Psi} \mathbf{b}$ die "Push-Forward-Transformation" durch Ψ der kovarianten Ableitung $\tilde{\nabla}_{\Psi} \mathbf{B}$ ist, was gleichzeitig die Verbindung des relativen Gradienten $\nabla_{\Psi} \mathbf{b}$ zu einer kovarianten Ableitung herstellt. Die Auffassung, dass solche Objekte wie $(\Lambda_{\Psi})^C_{AD}$ einen Zusammenhang in R_R definieren, ist mehrfach in der Literatur diskutiert worden (s. z.B. [7], [74], [63], [71], [19], [58]). Dort wird zusätzlich gezeigt, dass die Objekte des Zusammenhangs $(\Lambda_{\Psi})^C_{AD}$ nicht torsionsfrei sind. Schreibt man in der Tat \mathcal{T}_{Ψ} für die Torsion, dann ergeben sich aus (2.121) und (3.85) die Komponenten der Torsion \mathcal{T}_{Ψ} relativ zu der Koordinatenbasis $\{\mathbf{E}_A\}$ zu

$$(\mathcal{T}_{\Psi})^C_{AD} = (\Psi^{-1})^C_j \left(\frac{\partial \Psi^j_D}{\partial X^A} - \frac{\partial \Psi^j_A}{\partial X^D} \right) \quad .\tag{3.88}$$

Diese sind i.A. von Null verschieden, woraus folgt, dass die Objekte des Zusammenhangs $(\Lambda_{\Psi})^C_{AD}$ nicht torsionsfrei sind. Aus (2.151) folgt außerdem sofort, dass der Riemannsche Krümmungstensor dieses Zusammenhangs verschwindet:

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}_{\Psi})^A_{BCD} &= \frac{\partial}{\partial X^C} \left\{ (\Psi^{-1})^A_j \frac{\partial \Psi^j_B}{\partial X^D} \right\} - \frac{\partial}{\partial X^D} \left\{ (\Psi^{-1})^A_j \frac{\partial \Psi^j_B}{\partial X^C} \right\} \\ &\quad + (\Psi^{-1})^A_j \frac{\partial \Psi^j_p}{\partial X^C} (\Psi^{-1})^p_m \frac{\partial \Psi^m_B}{\partial X^D} - (\Psi^{-1})^A_j \frac{\partial \Psi^j_p}{\partial X^D} (\Psi^{-1})^p_m \frac{\partial \Psi^m_B}{\partial X^C} = 0.\end{aligned}\tag{3.89}$$

Das bedeutet, dass die mit einem Zusammenhang $(\Lambda_\Psi)^C_{AD}$ relativ zu der Koordinatenbasis $\{\mathbf{E}_A\}$ ausgerüstete Mannigfaltigkeit R_R flach ist. Schließlich kann man R_R mit einer Nicht-Euklidischen Metrik ausrüsten, wenn man die Euklidische Metrik von R_t auf R_R mit Ψ transformieren lässt. Sind \mathbf{a}, \mathbf{b} beliebige Eulersche Vektorfelder und $\mathbf{A} := \Psi^{-1} \mathbf{a}$, $\mathbf{B} := \Psi^{-1} \mathbf{b}$ die zugehörigen Lagrangeschen Gegenstücke, dann definiert

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} \mathbf{b} \quad , \quad (3.90)$$

eine Euklidische Metrik (Metriktenor) auf R_t und

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot (\Psi^T \Psi) \mathbf{B} \quad (3.91)$$

eine Nicht-Euklidische Metrik auf R_R . Außerdem ist $\Psi^T \Psi$ symmetrisch und positiv definit. Die Komponenten von $\tilde{\mathbf{G}}$ relativ zu der Koordinatenbasis $\{\mathbf{E}_A\}$ lauten dann

$$\tilde{G}_{AB} = \Psi^j_A \delta_{ij} \Psi^i_B = \delta^i_A \{(\mathbf{g}_\Psi)_i \cdot (\mathbf{g}_\Psi)_j\} \delta^j_B \quad . \quad (3.92)$$

Da Ψ ein inkompatibles Deformationsfeld ist, stellt Ψ^j_A keine Jakobi-Matrix einer Koordinatentransformation dar. Demzufolge gibt es kein globales Koordinatensystem relativ zu dem die Komponenten von $\tilde{\mathbf{G}}$ überall durch das Kronecker-Delta gegeben wären. Setzt man die Metrikoeffizienten (3.92) in (2.122) ein, so wird man sofort feststellen, dass

$$\begin{aligned} -\mathcal{Q}_{LKI} &= \frac{\partial(\Psi^i_I \delta_{ij} \Psi^j_K)}{\partial X^L} - (\Lambda_\Psi)^m_{LI} \Psi^i_m \delta_{ij} \Psi^j_K - (\Lambda_\Psi)^m_{LK} \Psi^i_I \delta_{ij} \Psi^j_m \\ &= \frac{\partial \Psi^i_I}{\partial X^L} \delta_{ij} \Psi^j_K + \Psi^i_I \delta_{ij} \frac{\partial \Psi^j_K}{\partial X^L} - (\Psi^{-1})^m_i \frac{\partial \Psi^i_I}{\partial X^L} \Psi^j_m \delta_{jn} \Psi^n_K \\ &\quad - (\Psi^{-1})^m_i \frac{\partial \Psi^i_K}{\partial X^L} \Psi^j_I \delta_{jn} \Psi^n_m = 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

gilt. Also ist der Zusammenhang $(\Lambda_\Psi)^C_{AD}$ in Bezug auf die Metrik $\tilde{\mathbf{G}}$ metrisch. Wir fassen zusammen: Mit der Metrik $\tilde{\mathbf{G}}$ und dem Zusammenhang $(\Lambda_\Psi)^C_{AD}$ lässt sich der Raum R_R als eine flache Nicht-Euklidische und Nicht-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem metrischen und nicht symmetrischen Zusammenhang auffassen.

Anstelle des speziellen Zusammenhanges $(\Lambda_\Psi)^C_{AD}$ kann man natürlich einen beliebigen Zusammenhang Λ^C_{AD} in (3.86) wählen, um eine allgemeine kovariante Ableitung $\tilde{\nabla} \mathbf{B}$ in R_R zu definieren:

$$\tilde{\nabla} \mathbf{B} := \left\{ \frac{\partial b^C}{\partial X^A} + \Lambda^C_{AD} b^D \right\} \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^A \quad . \quad (3.94)$$

Dies entspricht dem Vorgehen von KONDO (s. [52]). Aus der "Push-Forward-Transformation" von $\tilde{\nabla} \mathbf{B}$ mit Ψ erhält man (vgl. (3.50))

$$\nabla \mathbf{b} := \Psi(\tilde{\nabla} \mathbf{B})\Psi^{-1} = \left\{ \frac{\partial b^i}{\partial X^j} + \Lambda^i_{jl} b^l \right\} (\mathbf{g}_\Psi)_i \otimes (\mathbf{g}_\Psi)^j \quad . \quad (3.95)$$

Wie vorher bildet Λ^i_{jl} keinen Zusammenhang für R_t . Auch $\nabla \mathbf{b}$ ist keine kovariante Ableitung in R_t sondern die durch Ψ "Push-Forward-Transformation" der kovarianten Ableitung $\tilde{\nabla} \mathbf{B}$. Im

Weiteren bezeichnen wir $\nabla \mathbf{b}$ als die *relative kovariante Ableitung* von \mathbf{b} in R_t in Analogie zum relativen Gradient von \mathbf{b} (vgl. (3.58)). Im Allgemeinen wird außerdem Λ^C_{AD} nicht symmetrisch sein und der zugehörige Riemannsche Krümmungstensor \mathcal{R}^A_{BCD} wird nicht verschwinden. Damit wird der Raum R_R mit der Metrik $\tilde{\mathbf{G}}$ und dem Zusammenhang Λ^C_{AD} ausgerüstet. Dabei stellt R_R einen Nicht-Euklidischen und Nicht-Riemannschen Raum mit nicht symmetrischem und nicht metrischem Zusammenhang dar. Weitere Möglichkeiten $\nabla_{\Psi} \mathbf{b}$ mit einer kovarianten Ableitung in Verbindung zu bringen, werden in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [40] diskutiert und werden hier nicht in Betracht gezogen.

4 Bilanzgleichungen des mikropolaren Kontinuums

4.1 Massenbilanz

In realen Materialien ist die Masse üblicherweise diskret und musterartig verteilt. Das Mikrokontinuum dient, wie in Kapitel 3.1 erwähnt, dazu, solches Materialverhalten mit den Methoden der Kontinuumsmechanik in einem gemittelten Sinne zu beschreiben. Zu diesem Zweck wird angenommen (s. [41]), dass eine Massendichte $\varrho'(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ zu jedem Punkt der Mikrostruktur in $R'_t(\mathbf{x})$ zugeordnet ist. Beginnt der Deformationsprozess zur Zeit $t_0 = 0$, so ist $\varrho'_R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \equiv \varrho'(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0)$ die Massendichte desselben materiellen Punktes in $R'_R(\mathbf{X})$. Seien $V'(\mathbf{X})$, $v'(\mathbf{x}, t)$ jeweils das Volumen des Raumbereichs, der von dem Mikrokontinuum am Punkt \mathcal{X} in der Bezugs- und in der Momentankonfiguration eingenommen wird. In der folgenden Diskussion werden sehr oft das Argument \mathbf{X} in den Funktionen $V'(\mathbf{X})$, $R'_R(\mathbf{X})$, das Argument \mathbf{x} in der Funktion $R'_t(\mathbf{x})$ und die Argumente \mathbf{x} , t in der Funktion $v'(\mathbf{x}, t)$ weggelassen, um die Notation zu vereinfachen. Im Hinblick auf $\det \bar{\mathbf{R}} = 1$ sieht man, dass

$$v' = V' \quad \text{bzw.} \quad dv' = dV' \quad (4.1)$$

gilt. Außerdem nehmen wir an, dass die Massenerhaltung für das Mikrokontinuum gilt, so dass

$$\varrho'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = \varrho'_R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \quad (4.2)$$

geschrieben werden kann. Wir schreiben $\varrho_R(\mathbf{X})$ für die Massendichte des Makrokontinuums in der Bezugskonfiguration und setzen voraus, dass $\varrho_R(\mathbf{X})$ durch die Volumenmittelung

$$\varrho_R(\mathbf{X}) = \langle \varrho'_R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \rangle_{R_R} := \frac{1}{V'} \int_{R'_R} \varrho'_R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') dV' \quad (4.3)$$

gegeben wird (vgl. GRAMMENOU DIS & TSAKMAKIS [44]). Wir schreiben $\varrho(\mathbf{x}, t)$ für die Massendichte des Makrokontinuums in der Momentankonfiguration und verlangen die Massenerhaltung für das Makrokontinuum, d.h.

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \frac{\varrho_R(\mathbf{X})}{\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)} \quad (4.4)$$

Dies zusammen mit den Gleichungen (4.1) - (4.3) liefert

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \langle \varrho'(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \rangle_{R_t} := \frac{1}{v'} \int_{R'_t} \varrho'(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) dv' \quad (4.5)$$

wobei

$$w(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)} \quad (4.6)$$

eine Gewichtsfunktion bedeutet. Die Gleichung (4.5) sagt aus, dass die Massendichte des Makrokontinuums durch eine gewichtete Volumenmittelung der Massendichte des Mikrokontinuums gegeben wird. Die Gewichtsfunktion $w(\mathbf{x}, t)$ in (4.6) berücksichtigt die Deformation des Makrokontinuums.

4.2 Bilanzgleichung für Impuls und Drehimpuls

Einem Vorschlag von MINDLIN [72] für kleine Deformationen folgend, leiteten GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [41] die Bilanzgleichungen für Impuls- und Drehimpuls für große Deformationen für ein mikropolares Kontinuum her. Diese Herleitung basiert auf dem Hamilton'schen Prinzip und benutzt eine kinetische Energie, die durch Volumenmittelung aus dem Mikrokontinuum gegeben wird. Zur weiteren Formulierung der Theorie wird an erster Stelle rein elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Für die spezifische freie Energiefunktion wird

$$\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}, \text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}) \quad (4.7)$$

angenommen. Damit wird der höhere Gradient $\text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}$ berücksichtigt. Dies gestattet eine Verallgemeinerung klassischer Elastizitätstheorien. Werden die Trägheitsterme vernachlässigt, so liefert das Hamiltonsche Prinzip die lokalen Gleichungen für Impuls

$$\text{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad R_t \quad (4.8)$$

und Drehimpuls

$$\mathbf{t}_T + \text{div} \mathbf{T}_c + \mathbf{b}_c = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad R_t \quad , \quad (4.9)$$

wobei \mathbf{T} der *Cauchysche Spannungstensor* und \mathbf{T}_c der *Eulersche Momentenspannungstensor* sind. Der Vektor \mathbf{t}_T ist im wesentlichen der axiale Vektor vom Spannungstensor \mathbf{T} , der jetzt nicht mehr symmetrisch ist:

$$\mathbf{t}_T := \text{axl}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \quad . \quad (4.10)$$

Die Vektoren \mathbf{t} und \mathbf{t}_c sind jeweils der Spannungsvektor und der Momentenspannungsvektor

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{t}_c = \mathbf{T}_c \mathbf{n} \quad , \quad (4.11)$$

wobei \mathbf{n} die Außennormale auf ∂R_t ist. Dementsprechend stellen \mathbf{b} und \mathbf{b}_c jeweils Volumenkräfte und Volumenmomente dar. Die Gleichungen (4.8) und (4.9) wurden zwar in Bezug auf rein elastisches Materialverhalten hergeleitet, gelten aber für beliebige mikropolare Körper. Sie wurden von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [41] anhand des Hamiltonschen Prinzips gewonnen, waren aber zum ersten Mal von ERINGEN (s. z.B. [31]) im Rahmen einer anderen Vorgehensweise aufgestellt.

4.3 Bilanzgleichung für die mechanische Leistung

Die Bilanzgleichung für die mechanische Energie folgt aus den Bilanzgleichungen für Impuls (4.8) und Drehimpuls (4.9) nach skalarer Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ und Anwendung des Gaußschen Satzes. Nach einigen Standardumrechnungen und Addition der zwei Gleichungen ergibt sich die Bilanzgleichung für die mechanische Leistung bei Vernachlässigung von Trägheitstermen zu

$$\int_{\partial R_t} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{R_t} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) dv = \int_{R_t} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}_T \cdot \boldsymbol{\omega}) dv \quad . \quad (4.12)$$

In dieser Gleichung ist $\boldsymbol{\omega}$ der axiale Vektor des microgyration Tensors $\boldsymbol{\Omega}$ (s. (3.32)), ∂R_t der Rand von R_t , da bezeichnet ein materielles Flächenelement in ∂R_t , während dv ein Volumenelement in R_t ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_T \cdot \boldsymbol{\omega} &= \left\{ \frac{1}{2} e_{ijk} (T_{kj} - T_{jk}) \mathbf{e}_i \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} e_{mnq} \Omega_{qn} \mathbf{e}_m \right\} \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{jn} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kn}) (T_{kj} - T_{jk}) \Omega_{qn} = T_{qn} \Omega_{qn} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (4.13)$$

und deswegen

$$\int_{\partial R_t} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{R_t} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) dv = \int_{R_t} \{ \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} \} dv. \quad (4.14)$$

Während die linke Seite von (4.14) die Leistung der äußeren Kräfte darstellt, bildet die rechte Seite die Leistung der inneren Kräfte. Die Bilanz der mechanischen Energie folgt aus (4.14) durch zeitliche Integration. Man bezeichnet $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})$ und $\mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega}$ jeweils als *Spannungs- und Momentenspannungsleistung* pro Einheitsvolumen der aktuellen Konfiguration. Die entsprechenden Spannungsleistungen pro Einheitsvolumen der Bezugskonfiguration lauten

$$W_s := \frac{\varrho_R}{\varrho} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \quad , \quad (4.15)$$

$$W_c := \frac{\varrho_R}{\varrho} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} \quad , \quad (4.16)$$

mit den *gewichteten Cauchy'schen Spannungstensoren*

$$\mathbf{S} := \frac{\varrho_R}{\varrho} \mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} = (\det \mathbf{V}) \mathbf{T} \quad , \quad (4.17)$$

$$\mathbf{S}_c := \frac{\varrho_R}{\varrho} \mathbf{T}_c = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}_c = (\det \bar{\mathbf{V}}) \mathbf{T}_c \quad . \quad (4.18)$$

Man merke, dass \mathbf{S}_c hier anderes definiert als bei GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] oder GRAMMENOUDIS [38] ist.

5 Mikropolare Verzerrungs- und Spannungstensoren

5.1 Invarianz der freien Energie bei überlagerten Starrkörperrotationen auf die Momentankonfiguration

Wir betrachten erneut die spezifische freie Energiefunktion in (4.7). Bei Überlagerung von Starrkörperrotationen \mathbf{Q} auf die Momentankonfiguration gilt neben (3.19) und (3.28) noch

$$(\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}})^* \equiv \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}^* = \mathbf{Q} \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A, \quad (5.1)$$

wobei auch Gebrauch von (3.44) gemacht wurde. Die Anwendung des *Prinzips der materiellen Objektivität* verlangt $\Psi^* = \Psi$, d.h.

$$\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{Q} \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}) \quad . \quad (5.2)$$

Wählt man insbesondere $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{R}}^T$, dann folgt

$$\Psi = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{R}}^T \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}) \quad , \quad (5.3)$$

oder

$$\Psi = \bar{\bar{\Psi}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\mathcal{K}}) \quad , \quad (5.4)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbf{1} = \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1} \quad , \quad (5.5)$$

$$\tilde{\mathcal{K}} := \bar{\mathbf{R}}^T \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (5.6)$$

GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] formulierten eine mikropolare Plastizitätstheorie auf der Grundlage eines *mikropolaren Verzerrungstensors* $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und eines *mikropolaren Krümmungstensors* $\tilde{\mathcal{K}}$. Bei nichtlinearen Theorien ist bekannt, dass gleiche Materialfunktionen formuliert mit unterschiedlichen z.B. Verzerrungstensoren zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Deswegen ist es von Interesse herauszufinden, ob eine mikropolare Plastizitätstheorie mit derselben Struktur wie diejenige von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS, jedoch formuliert mit anderen Spannungs- und Verzerrungsvariablen wesentlich andere Resultate liefern wird. Da Längenskaleneffekte von dem mikropolaren Krümmungstensor gesteuert werden, werden wir versuchen, diese Frage für

den Fall einer Plastizitätstheorie auf der Grundlage eines von $\tilde{\mathcal{K}}$ unterschiedlichen mikropolaren Krümmungstensors $\tilde{\mathcal{M}}$ zu klären. Einen möglichen Kandidat für $\tilde{\mathcal{M}}$ erhält man folgenderweise:

Aus (5.3) folgt

$$\Psi = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{1}, \tilde{\mathcal{K}}) = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{1}, \tilde{\mathcal{K}} \bar{\mathbf{U}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}) =: \bar{\bar{\Psi}}(\bar{\mathbf{U}}, \tilde{\mathcal{K}} \bar{\mathbf{U}}^{-1}) = \tilde{\Psi}(\tilde{\epsilon}, \tilde{\mathcal{M}}) \quad , \quad (5.7)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{M}} := \tilde{\mathcal{K}} \bar{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^T (\text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^T (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\mathbf{R}}) \quad . \quad (5.8)$$

Mit Hilfe von (3.61) und (3.66) erhält man dann folgende Definition

$$\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\mathbf{R}} := (\text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{U}}^{-1} = (\text{grad} \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{R}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \quad . \quad (5.9)$$

Aus den Ausführungen in den Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 geht hervor, dass der relative Gradient $\frac{\partial}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A$ in (5.9) als Differentialoperator selbst keine kovariante Ableitung in R_R definiert, kann aber zu einer solchen in Verbindung gebracht werden. Als mögliches Gegenstück von $\tilde{\mathcal{M}}$ in der Momentankonfiguration definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\tilde{\mathcal{M}}] = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})\left[\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A\right] \\ &= \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \bar{\mathbf{R}}^T \otimes \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{E}}^A = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}^T \otimes \mathbf{e}^i = \text{grad} \bar{\mathbf{R}} \diamond \bar{\mathbf{R}}^T \quad . \end{aligned} \quad (5.10)$$

In Worten: Sowohl $\tilde{\mathcal{M}}$ als auch \mathcal{M} sind in Termen von $\bar{\mathbf{R}}$ und einem Gradient von $\bar{\mathbf{R}}$ ausgedrückt. Allerdings erhält $\tilde{\mathcal{M}}$ einen relativen, während \mathcal{M} einen echten Gradient von $\bar{\mathbf{R}}$ erhält. In der Theorie von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] wird als Eulersches Gegenstück von $\tilde{\mathcal{K}}$ der mikropolare Krümmungstensor

$$\mathcal{K} := \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\tilde{\mathcal{K}}] = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^A} \bar{\mathbf{R}}^T \otimes (\bar{\mathbf{R}} \mathbf{E}^A) = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^i} \otimes (\delta_A^i \bar{\mathbf{R}} \mathbf{E}^A) \right) \diamond \bar{\mathbf{R}}^T \quad (5.11)$$

definiert. Ein Vergleich macht sofort deutlich, dass sowohl $\tilde{\mathcal{K}}$ als auch \mathcal{K} Funktionen von $\bar{\mathbf{R}}$ und einem Gradient von $\bar{\mathbf{R}}$ sind. Jetzt enthält aber \mathcal{K} einen relativen, während $\tilde{\mathcal{K}}$ einen echten Gradient von $\bar{\mathbf{R}}$ enthält. Der relative Gradient wird durch den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial X^i} \otimes (\delta_A^i \bar{\mathbf{R}} \mathbf{E}^A)$ dargestellt.

Natürlich kann man auch die Theorie mit mikropolaren Krümmungstensoren formulieren, die sowohl in der Bezugs- als auch in der Momentankonfiguration echte Gradienten von $\bar{\mathbf{R}}$ enthalten. Dies übersteigt allerdings den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Als Nächstes werden wir geeignete geometrische Interpretationen für $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ angeben. Unsere Vorgehensweise ist derjenigen in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] und [40] ähnlich.

5.2 Geometrische Interpretationen mittels skalarwertigen Differenzen

5.2.1 Die Differenz Δ_s

Nun betrachtet man eine materielle Linie in der Bezugskonfiguration R_R parametrisiert mit $\lambda \in \mathbb{I}$, d.h. zu jedem Punkt der Linie führt ein Ortsvektor $\mathbf{A}(\lambda)$. An der Stelle $\mathbf{X} = \mathbf{A}(\lambda_0)$ besitzt die Linie den Tangentenvektor $\mathcal{A} := d\mathbf{A}(\lambda_0)/d\lambda$ (s. Abb. 5.1). Dieselbe materielle Linie in der Momentankonfiguration R_t wird mit dem Ortsvektor $\mathbf{a}(\lambda, t) = \chi(\mathbf{A}(\lambda), t)$ beschrieben. Der Tangentenvektor an dieser Linie in R_t am Punkt $\mathbf{x} := \mathbf{a}(\lambda_0, t)$ wird mit $\alpha(t) := d\mathbf{a}(\lambda_0, t)/d\lambda$ bezeichnet. In der Kontinuumsmechanik werden $d\mathbf{X} = \mathcal{A}d\lambda$ und $d\mathbf{x} = \alpha d\lambda$ auch materielle Linienelemente genannt. Sei ferner $\Phi = \Phi(\mathbf{X})$ ein Vektor am Punkt \mathbf{X} , der als Ortsvektor für das Mikrokontinuum an \mathbf{X} oder als Tangentenvektor an \mathbf{X} an einer materiellen Linie des Mikrokontinuums gedacht werden kann. Der entsprechende Vektor in $R'_t(\mathbf{x})$ wird mit $\varphi(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet.

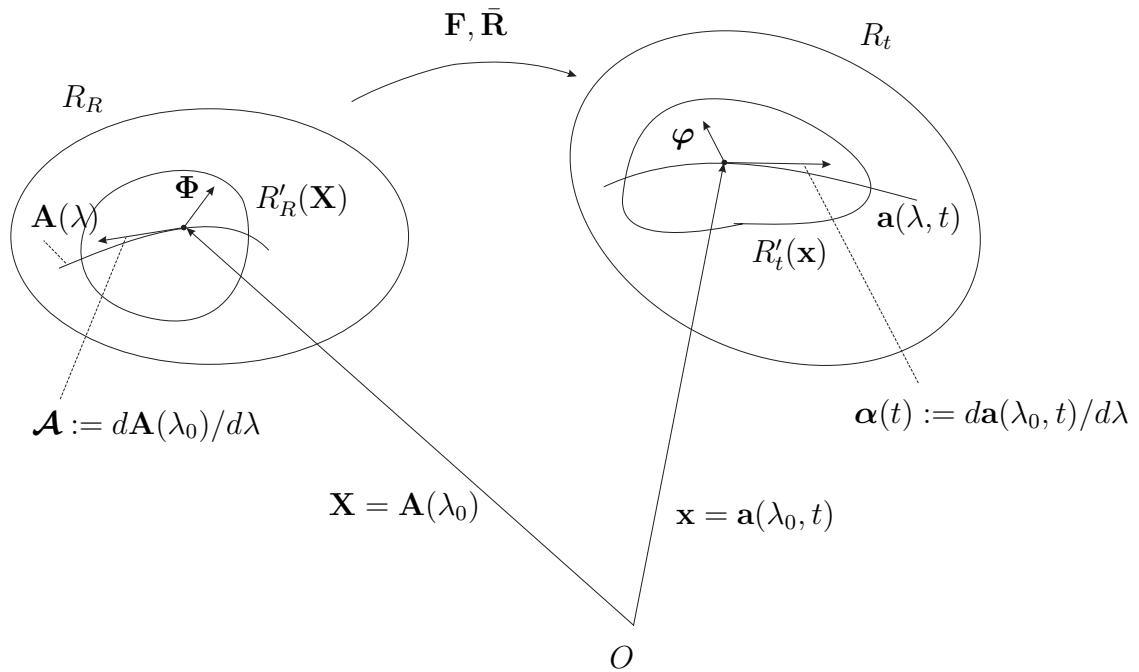


Abbildung 5.1: \mathbf{F} und $\bar{\mathbf{R}}$ sind Zweipunktensoren, die Vektoren am Punkt \mathbf{X} auf Vektoren am Punkt \mathbf{x} abbilden.

Es gilt

$$\alpha = \mathbf{F}\mathcal{A} \quad , \quad \varphi = \bar{\mathbf{R}}\Phi \quad . \quad (5.12)$$

Wir definieren die skalarwertige Differenz

$$\Delta_s := \varphi \cdot \alpha - \Phi \cdot \mathcal{A} \quad (5.13)$$

als ein Maß für die Geometrie der Deformation des mikropolaren Kontinuums. Aus dieser Definition folgt

$$\Delta_s := \Phi \cdot (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \mathcal{A} = \Phi \cdot (\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1}) \mathcal{A} = \varphi \cdot (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{R}} \mathbf{F}^{-1}) \alpha = \varphi \cdot (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1}) \alpha, \quad (5.14)$$

oder

$$\Delta_s := \Phi \cdot \tilde{\epsilon} \mathcal{A} = \varphi \cdot \epsilon \alpha \quad (5.15)$$

mit $\tilde{\epsilon}$ wie in (5.5) definiert und

$$\epsilon := \mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\epsilon} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (5.16)$$

Anhand von (5.15) erkennt man, dass die Differenz Δ_s sich forminvariant mittels der Tensoren $\tilde{\epsilon}$ und ϵ darstellen lässt. Dieser Aspekt wird zugrunde gelegt, um Verzerrungstensoren in Bezug auf weitere Konfigurationen (lokale oder globale) einzuführen. Insbesondere wollen wir dies weiter unten in Zusammenhang mit einer Zerlegung der Deformation in elastische und plastische Anteile praktizieren.

5.2.2 Die Differenz Δ_c

Zur geometrischen Interpretation der mikropolaren Krümmungstensoren $\tilde{\mathcal{M}}$ und \mathcal{M} betrachten wir die drei Vektoren

$$\varphi_i(\mathbf{x}, t) = \delta^A_i \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) \Phi_A(\mathbf{X}) \quad (5.17)$$

in (3.36) und bilden die skalarwertige Differenz

$$\Delta_c := \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2) [\varphi_3] - \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2) [\Phi_3] \quad (5.18)$$

als ein Maß für die Geometrie der Deformation der Mikrostruktur des mikropolaren Kontinuums, wobei

$$\nabla_t \varphi_2 := \text{grad} \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad (5.19)$$

$$\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2 := (\text{GRAD} \Phi_2) \bar{\mathbf{U}}^{-1} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \quad (5.20)$$

gilt. Die geometrische Bedeutung von Δ_c liegt darin, dass sowohl die Rotation der Mikrostruktur als auch die örtliche Änderung der Mikrostruktur durch Vergleich zwischen Momentan- und Bezugskonfiguration erfasst werden.

Um die Differenz Δ_c anders darzustellen, beginnen wir mit einer Umschreibung des ersten Termes auf der rechten Seite von (5.18). Das Ziel ist, diesen Term in einer linearen Abhängigkeit von Φ_1, Φ_2, Φ_3 zu bringen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2) [\varphi_3] &= (\bar{\mathbf{R}} \Phi_1) \cdot \left(\frac{\partial (\bar{\mathbf{R}} \Phi_2)}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i \right) (\bar{\mathbf{R}} \Phi_3) \\ &= \Phi_1 \cdot \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \Phi_2 \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) \Phi_3 + \Phi_1 \cdot \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) \Phi_3 \\ &= \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] + \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2) [\Phi_3] \quad , \end{aligned} \quad (5.21)$$

wobei Gebrauch von den Formeln in Kap. 1.3 gemacht wurde. Einsetzen von (5.21) in (5.18) liefert die gewünschte Beziehung

$$\Delta_c = \tilde{\mathcal{M}}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \quad . \quad (5.22)$$

Als nächstes werden wir Δ_c forminvariant relativ zu R_t umschreiben. Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (5.18) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2)[\Phi_3] &= (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1) \cdot \left(\frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2)}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) [\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_3] \\ &= \varphi_1 \cdot \left(\bar{\mathbf{R}} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^T}{\partial x^i} \varphi_2 \otimes \mathbf{e}^i \right) \varphi_3 + \varphi_1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i \right) [\varphi_3] \\ &= \left(\bar{\mathbf{R}} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^T}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i \right) [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] + \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2)[\varphi_3] \\ &= -\mathcal{M}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] + \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2)[\varphi_3] \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Damit erhält man aus (5.18)

$$\Delta_c = \mathcal{M}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad . \quad (5.24)$$

Die Gleichungen (5.22) und (5.24) liefern die geometrische Interpretation für die Tensoren $\tilde{\mathcal{M}}$ und \mathcal{M} . Sie sind lineare Funktionen zur Darstellung von Differenzen der Form Δ_c . Ein interessanter Aspekt in diesen Ausführungen wird deutlich durch folgende Umrechnung

$$\begin{aligned} \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2)[\Phi_3] &= (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1) \cdot \left(\frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2)}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \right) (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_3) \\ &= \varphi_1 \cdot \left\{ \left(\frac{\partial(\varphi_2)^k}{\partial x^i} + \bar{R}_A^k \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}^T)^A_m}{\partial x^i} (\varphi_2)^m \right) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \right\} [\varphi_3] \\ &= \varphi_1 \cdot (\bar{\nabla}_t \varphi_2)[\varphi_3] \quad , \end{aligned} \quad (5.25)$$

wobei

$$\varphi_2 = (\varphi_2)^m \mathbf{e}_m \quad , \quad (5.26)$$

$$\bar{\nabla}_t \varphi_2 := \left\{ \frac{\partial(\varphi_2)^k}{\partial x^i} + (\bar{\Lambda}_t)^k_{im} (\varphi_2)^m \right\} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad (5.27)$$

$$(\bar{\Lambda}_t)^k_{im} := \bar{R}_A^k \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}^T)^A_m}{\partial x^i} = -\frac{\partial \bar{R}_A^k}{\partial x^i} (\bar{\mathbf{R}}^T)^A_m \quad (5.28)$$

gilt. Also stellen die Größen $(\bar{\Lambda}_t)^k_{im}$ Objekte eines nicht-Euklidischen Zusammenhanges in Bezug auf das kartesische Koordinatensystem $\{x^i\}$ relativ zu R_t dar. Auf der anderen Seite sei

$$\nabla_t \varphi_2 = \frac{\partial(\varphi_2)^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \quad (5.29)$$

die Levi-Civita kovariante Ableitung von φ_2 in R_t . Zu der Levi-Civita kovarianten Ableitung ∇_t gehören Objekte des Zusammenhanges, die relativ zu $\{x^i\}$ verschwinden. Auf diesem Weg

folgt aus (5.18)

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2)[\varphi_3] - \varphi_1 \cdot (\bar{\nabla}_t \varphi_2)[\varphi_3] = \varphi_1 \cdot \{ (0_{im}^k - (\bar{\Lambda}_t)^k_{im} (\varphi_2)^m) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \} [\varphi_3] \\ &= \{ (0_{im}^k - (\bar{\Lambda}_t)^k_{im}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^i \} [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \mathcal{M}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad .\end{aligned}\tag{5.30}$$

Es ist bekannt, dass Differenzen zwischen Objekten von Zusammenhängen Komponenten eines Tensors dritter Stufe bilden, obwohl die Objekte selbst für sich betrachtet keine Komponenten eines Tensors dritter Stufe sind. Sind \mathcal{M}_{im}^k die Komponenten von \mathcal{M} relativ zu der Basis $\{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^i\}$, dann besagt (5.30), dass

$$\mathcal{M}_{im}^k \equiv \mathcal{M}_{kmi} = 0_{im}^k - (\bar{\Lambda}_t)^k_{im} = \frac{\partial \bar{R}_A^k}{\partial x^i} (\bar{\mathbf{R}}^T)^A_m = -\mathcal{M}_{mki} \tag{5.31}$$

gilt. Damit ist klar, dass \mathcal{M}_{im}^k Symbole einer Differenz von Zusammenhängen sind. Nur in Bezug auf die kartesische Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ fallen die Komponenten von \mathcal{M} , bis auf das Vorzeichen, mit den Objekten eines Zusammenhangs zusammen.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

$$\Delta_c := \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2)[\varphi_3] - \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2)[\Phi_3] = \tilde{\mathcal{M}}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = \mathcal{M}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], \tag{5.32}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^A := \delta^A_i \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{e}^i, \tag{5.33}$$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\Gamma}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A, \tag{5.34}$$

$$\mathcal{M} = \text{grad} \bar{\mathbf{R}} \diamond \bar{\mathbf{R}}^T = \Gamma_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\tilde{\mathcal{M}}], \tag{5.35}$$

$$\tilde{\Gamma}_A := \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A}, \tag{5.36}$$

$$\Gamma_i := \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\Gamma}_i \bar{\mathbf{R}}^T. \tag{5.37}$$

5.3 Zweistufige mikropolare Krümmungstensoren

Da der zweistufige Tensor $\tilde{\Gamma}_A$ in (5.36) antisymmetrisch ist, kann er durch seinen axialen Vektor (vgl. Notation in Kap.1.3)

$$\tilde{\gamma}_A := \text{axl} \tilde{\Gamma}_A \tag{5.38}$$

dargestellt werden. Vielmehr ist es üblich (siehe z.B. ERINGEN [32], Kapitel 1.0 -1.5) mit zweistufigen mikropolaren Tensoren von der Form

$$\tilde{\mathbf{M}} := \tilde{\gamma}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A \tag{5.39}$$

bei der Formulierung von konstitutiven Theorien, anstelle von dreistufigen Tensoren $\tilde{\mathcal{M}}$ zu arbeiten. Mit Hilfe von (1.24), (1.36) und (1.37) erhält man

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \tilde{\mathcal{M}} [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = (\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^A} \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A) [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \\ &= (\Phi_1 \cdot \tilde{\Gamma}_A \Phi_2) (\tilde{\mathbf{E}}^A \cdot \Phi_3) = \Phi_1 \cdot (\tilde{\gamma}_A \times \Phi_2) (\tilde{\mathbf{E}}^A \cdot \Phi_3) \\ &= \Phi_1 \cdot \{(\tilde{\gamma}_A \times \Phi_2) \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A\} [\Phi_3] = \{(\tilde{\gamma}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A) \times \Phi_2\} [\Phi_1, \Phi_3] \quad ,\end{aligned}\tag{5.40}$$

oder (s. (5.39))

$$\Delta_c = (\tilde{\mathbf{M}} \times \Phi_2) [\Phi_1, \Phi_3] \quad .\tag{5.41}$$

Auch diese Formulierung für Δ_c kann forminvariant relativ zu R_t umgeschrieben werden. Dazu definieren wir

$$\gamma_i := \text{axl } \Gamma_i \quad , \quad \mathbf{M} := \gamma_i \otimes \mathbf{e}^i\tag{5.42}$$

und erhalten aus (5.32) und (5.35)

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \mathcal{M} [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = (\Gamma_i \otimes \mathbf{e}^i) [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \\ &= (\varphi_1 \cdot \Gamma_i \varphi_2) (\mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) = \varphi_1 \cdot (\gamma_i \times \varphi_2) (\mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) = \{(\gamma_i \otimes \mathbf{e}^i) \times \varphi_2\} [\varphi_1, \varphi_3] \quad ,\end{aligned}\tag{5.43}$$

oder

$$\Delta_c = (\mathbf{M} \times \varphi_2) [\varphi_1, \varphi_3] \quad ,\tag{5.44}$$

womit die Forminvarianz durch Vergleich mit (5.41) klar wird. Seien jetzt \mathbf{a}, \mathbf{b} zwei beliebige Eulersche Vektoren und

$$\tilde{\mathbf{a}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{a} \quad , \quad \tilde{\mathbf{b}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b}\tag{5.45}$$

Lagrangesche Gegenstücke davon. Es ist einerseits

$$(\Gamma_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\gamma_i \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \gamma_i\tag{5.46}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}(\Gamma_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \delta^A_i (\tilde{\Gamma}_A \tilde{\mathbf{a}}) \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \delta^A_i (\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \tilde{\gamma}_A \\ &= \delta^A_i (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{a} \times \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b}) \cdot \bar{\mathbf{R}}^T (\bar{\mathbf{R}} \tilde{\gamma}_A) = \delta^A_i (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\bar{\mathbf{R}} \tilde{\gamma}_A) \quad ,\end{aligned}\tag{5.47}$$

wobei (1.21) benutzt wurde. Da die Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} beliebig sind, folgt aus (5.46) und (5.47)

$$\tilde{\gamma}_A = \delta^i_A (\bar{\mathbf{R}}^T \gamma_i) \quad , \quad \gamma_i = \delta^A_i (\bar{\mathbf{R}} \tilde{\gamma}_A) \quad ,\tag{5.48}$$

womit man aus (5.39) und (5.42)) noch

$$\tilde{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \mathbf{M} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}}^T\tag{5.49}$$

erhält. Die Gleichungen (5.37), (5.48) und (5.49) verzeichnen das Transformationsverhalten jeweils zwischen $\tilde{\Gamma}_A, \tilde{\gamma}_A, \tilde{\mathbf{M}}$ und $\Gamma_i, \gamma_i, \mathbf{M}$ und stellen das Gegenstück von (5.35) dar.

5.4 Geschwindigkeiten zugeordnet zu den mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren

Zu jedem mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensor können wir eine Geschwindigkeit dadurch zuordnen, dass wir nicht nur von den Differenzen Δ_s, Δ_c sondern auch von ihren zeitlichen Änderungen $\dot{\Delta}_s, \dot{\Delta}_c$ Forminvarianz verlangen. Höhere Zeitableitungen von Geschwindigkeiten werden außerdem gewonnen, wenn man verlangt, dass auch die höheren Zeitableitungen $\ddot{\Delta}_s, \ddot{\Delta}_c$ forminvarianten Darstellungen genügen. Diese Methode, Geschwindigkeiten zu den kinematischen Variablen unabhängig von Materialeigenschaften zuzuweisen, ist eine Verallgemeinerung einer in klassischer Kontinuumsmechanik von HAUPT & TSAKMAKIS [47], [48] vorgeschlagenen Vorgehensweise. Zuerst konzentrieren wir uns auf die Differenz Δ_s in (5.15). Da \mathcal{A} und Φ als zeitunabhängig anzusehen sind, ergibt sich aus (5.12)

$$\dot{\alpha} = \mathbf{L} \alpha \quad , \quad \dot{\varphi} = \mathbf{\Omega} \varphi \quad , \quad (5.50)$$

mit \mathbf{L} und $\mathbf{\Omega}$ definiert durch (3.25) und (3.30). Dann folgt aus (5.15)

$$\dot{\Delta}_s = \Phi \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} \mathcal{A} = \varphi \cdot \overset{\square}{\epsilon} \alpha \quad , \quad (5.51)$$

eine Beziehung in der $\dot{\Delta}_s$ forminvariant ausgedrückt wird. Dabei bedeutet

$$\overset{\square}{\epsilon} := \dot{\epsilon} - \mathbf{\Omega} \epsilon + \epsilon \mathbf{L} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\tilde{\epsilon}} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (5.52)$$

Die objektive Lagrangesche Geschwindigkeit $\dot{\tilde{\epsilon}}$ und die objektive Eulersche Geschwindigkeit $\overset{\square}{\epsilon}$ sind die zugeordneten Geschwindigkeiten jeweils von $\tilde{\epsilon}$ und ϵ . Anhand von (5.16) und (5.52) erkennt man, dass die Transformationen zwischen den Geschwindigkeiten dieselben sind wie diejenigen zwischen den Größen selbst. Darüber hinaus folgt aus (5.52) unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.29) und (5.5)

$$\overset{\square}{\epsilon} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\tilde{\epsilon}} \bar{\mathbf{U}}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^T = (\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}) \cdot \bar{\mathbf{U}}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^T - \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T = \mathbf{L} - \mathbf{\Omega} \quad . \quad (5.53)$$

Um auch $\dot{\Delta}_c$ auszurechnen, werden folgende Geschwindigkeiten benötigt: Einerseits sieht man aus (5.33), dass

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}^A = \delta^A_i \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \mathbf{e}^i = \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{E}}^A = -\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\tilde{\mathbf{R}}} \tilde{\mathbf{E}}^A = -\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{\Omega} \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{E}}^A \quad (5.54)$$

gilt. Andererseits folgt aus (5.48)

$$\dot{\gamma}_A = \delta^i_A (\dot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \gamma_i + \bar{\mathbf{R}}^T \dot{\gamma}_i) = \delta^i_A \bar{\mathbf{R}}^T (\bar{\mathbf{R}} \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \gamma_i + \dot{\gamma}_i) = \delta^i_A \bar{\mathbf{R}}^T (\dot{\gamma}_i - \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T \gamma_i) \quad (5.55)$$

oder

$$\dot{\gamma}_A = \delta^i_A \bar{\mathbf{R}}^T \overset{\square}{\gamma}_i \quad \text{mit} \quad \overset{\square}{\gamma}_i := \dot{\gamma}_i - \mathbf{\Omega} \gamma_i \quad . \quad (5.56)$$

Damit erhält man $\dot{\Delta}_c$ entweder aus (5.32)

$$\dot{\Delta}_c = \dot{\mathcal{M}} [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = \overset{\square}{\mathcal{M}} [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad (5.57)$$

mit

$$\overset{\square}{\dot{\mathcal{M}}} := \dot{\mathcal{M}} - \Omega \mathcal{M} - \Omega \diamond \mathcal{M} - \mathcal{M} \Omega^T = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\dot{\mathcal{M}}] \quad , \quad (5.58)$$

oder aus (5.41)

$$\dot{\Delta}_c = (\dot{\mathbf{M}} \times \Phi_2) [\Phi_1, \Phi_3] \quad , \quad (5.59)$$

bzw. aus (5.44)

$$\dot{\Delta}_c = (\overset{\square}{\mathbf{M}} \times \varphi_2) [\varphi_1, \varphi_3] \quad (5.60)$$

mit

$$\overset{\square}{\mathbf{M}} := \dot{\mathbf{M}} - \Omega \mathbf{M} + \mathbf{M} \Omega = \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}}^T \quad . \quad (5.61)$$

Zum Beweis von (5.60) wird (5.40) nach der Zeit differenziert:

$$\dot{\Delta}_c = \{(\dot{\gamma}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\gamma}_A \otimes \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^A) \times \Phi_2\} [\Phi_1, \Phi_3] \quad . \quad (5.62)$$

In diese Gleichung setzen wir (5.54) und (5.56) ein und berücksichtigen (1.19):

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_C &= (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1) \cdot \left\{ \left[(\bar{\mathbf{R}}^T \overset{\square}{\gamma}_i) \otimes (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{e}^i) + (\bar{\mathbf{R}}^T \gamma_i) \otimes (\dot{\bar{\mathbf{R}}}^T \mathbf{e}^i) \right] \times (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2) \right\} [\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_3] \\ &= (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1) \cdot \{ (\bar{\mathbf{R}}^T \overset{\square}{\gamma}_i) \times (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2) \} (\mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) \\ &\quad + (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1) \cdot \{ (\bar{\mathbf{R}}^T \gamma_i) \times (\bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2) \} (\bar{\mathbf{R}} \dot{\bar{\mathbf{R}}}^T \mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) \\ &= \varphi_1 \cdot (\overset{\square}{\gamma}_i \times \varphi_2) (\mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) + \varphi_1 \cdot (\gamma_i \times \varphi_2) (-\Omega \mathbf{e}^i \cdot \varphi_3) \\ &= \varphi_1 \cdot \{ (\gamma_i \otimes \mathbf{e}^i - \gamma_i \otimes \Omega \mathbf{e}^i) \times \varphi_2 \} [\varphi_3] \quad . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Letztere liefert (5.60), vorausgesetzt es gilt

$$\overset{\square}{\mathbf{M}} = \overset{\square}{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}^i + (\gamma_i \otimes \mathbf{e}^i) \Omega \equiv \overset{\square}{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}^i + \mathbf{M} \Omega \quad . \quad (5.64)$$

Dies wiederum ergibt sich durch Einsetzen von (5.42) in die Definition (5.61) unter Berücksichtigung von (5.56) und Zusammenfassen von Termen.

Weitere Beziehungen können durch Heranziehen des axialen Vektors $\boldsymbol{\omega}$ aufgestellt werden. Wegen (5.36) ist

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Gamma}}_A &= \delta_A^i \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \right) \cdot = \delta_A^i \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^B} (\mathbf{F}^{-1})^B_i \right) \cdot \\ &= \delta_A^i \left(\dot{\bar{\mathbf{R}}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^B} (\mathbf{F}^{-1})^B_i + \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{R}}}}{\partial X^B} (\mathbf{F}^{-1})^B_i \right) + \delta_A^i \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial X^B} [(\mathbf{F}^{-1})^B_i] \cdot \right) \\ &= \delta_A^i \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial X^B} \bar{\mathbf{R}} (\mathbf{F}^{-1})^B_i \right) - \delta_A^i \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^k} L^k_i \quad , \end{aligned} \quad (5.65)$$

oder

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_A = \delta_A^i \left\{ \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}} - \tilde{\Gamma}_B \delta^B_k L^k_i \right\} , \quad (5.66)$$

wobei L^k_i die Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} relativ zu der Koordinatenbasis $\{\mathbf{e}_i\}$ sind. Offensichtlich sind $\dot{\tilde{\Gamma}}_A$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial x^i}$ antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe, deren axiale Vektoren jeweils $\dot{\tilde{\gamma}}_A$ und $\frac{\partial \omega}{\partial x^i}$ sind. Für

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{A}} \quad , \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{B}} \quad (5.67)$$

mit $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ beliebige zeitunabhängige Langrangesche Vektoren haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_A [\tilde{\mathbf{A}}] &= \tilde{\mathbf{B}} \cdot (\dot{\tilde{\gamma}}_A \times \tilde{\mathbf{A}}) = (\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}_A \\ &= \delta^i_A \left\{ (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}) \right\} \cdot \bar{\mathbf{R}}^T \gamma_i^\square = \delta^i_A (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \gamma_i^\square . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Außerdem liefern die Gleichungen (5.66) und (5.67)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_A [\tilde{\mathbf{A}}] &= \delta^i_A \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} [\mathbf{A}] - \delta^i_A \mathbf{B} \cdot \Gamma_k L^k_i [\mathbf{A}] \\ &= \delta^i_A \mathbf{B} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^i} \times \mathbf{A} \right) - \delta^i_A \mathbf{B} \cdot (\gamma_k \times \mathbf{A}) L^k_i \\ &= \delta^i_A (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \gamma_k L^k_i \right\} . \end{aligned} \quad (5.69)$$

Da die Vektoren $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ (und deswegen auch die Vektoren \mathbf{A}, \mathbf{B}) beliebig ausgewählt werden können, folgt aus (5.68) und (5.69), dass

$$\gamma_i^\square = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \gamma_k L^k_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - (\gamma_k \otimes \mathbf{e}^k) \mathbf{L} \mathbf{e}_i , \quad (5.70)$$

oder

$$\gamma_i^\square = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{e}_i \quad (5.71)$$

gilt. Damit gelten folgende Beziehungen für die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} &= \dot{\tilde{\Gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\Gamma}_A \otimes \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^A \\ &= \dot{\tilde{\Gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + (\tilde{\Gamma}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A) (\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\bar{\mathbf{R}}}) \\ &= \dot{\tilde{\Gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \mathcal{M} (\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\bar{\mathbf{R}}}) , \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\dot{\mathcal{M}}^\square = \dot{\mathcal{M}} - \Omega \mathcal{M} - \Omega \diamond \mathcal{M} - \mathcal{M} \Omega^T = \dot{\Gamma}_i^\square \otimes \mathbf{e}^i - \mathcal{M} \Omega^T , \quad (5.73)$$

$$\dot{\mathcal{M}}^\square = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\dot{\mathcal{M}}] , \quad (5.74)$$

mit

$$\overset{\square}{\dot{\Gamma}}_i = \dot{\Gamma}_i - \Omega \Gamma_i - \Gamma_i \Omega^T = \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} - \Gamma_k L^k_i \quad , \quad (5.75)$$

$$\dot{\dot{\Gamma}}_A = \delta^i_A \left\{ \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}} - \tilde{\Gamma}_B \delta^B_k L^k_i \right\} \quad , \quad (5.76)$$

$$\overset{\square}{\dot{\Gamma}}_i = \delta^A_i \bar{\mathbf{R}} \dot{\dot{\Gamma}}_A \bar{\mathbf{R}}^T \quad , \quad (5.77)$$

bzw.

$$\dot{\dot{\mathbf{M}}} = \dot{\dot{\gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}}^T \Omega \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad (5.78)$$

$$\overset{\square}{\dot{\mathbf{M}}} = \dot{\mathbf{M}} - \Omega \mathbf{M} + \mathbf{M} \Omega = \overset{\square}{\dot{\gamma}}_i \otimes \mathbf{e}^i + \mathbf{M} \Omega \quad , \quad (5.79)$$

$$\overset{\square}{\dot{\mathbf{M}}} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\dot{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{R}}^T \quad , \quad (5.80)$$

mit

$$\overset{\square}{\dot{\gamma}}_i = \dot{\gamma}_i - \Omega \gamma_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{e}_i \quad , \quad (5.81)$$

$$\dot{\dot{\gamma}}_A = \delta^i_A \bar{\mathbf{R}}^T \overset{\square}{\dot{\gamma}}_i \quad . \quad (5.82)$$

Für die Zwecke des nächsten Abschnitts sind auch die folgenden Beziehungen wichtig. Aus (5.81) folgt, dass

$$\text{grad} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i = \overset{\square}{\dot{\gamma}}_i \otimes \mathbf{e}^i + \mathbf{M} \mathbf{L} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i) \quad , \quad (5.83)$$

und, da $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{1}$ folgt

$$\text{grad} \omega = \overset{\square}{\dot{\gamma}}_i \otimes \mathbf{e}^i + \mathbf{M} \mathbf{L} \quad . \quad (5.84)$$

Kombination der letzten Gleichung mit (5.79) liefert

$$\text{grad} \omega = \overset{\square}{\dot{\mathbf{M}}} + \mathbf{M} (\mathbf{L} - \Omega) \quad . \quad (5.85)$$

Schließlich sei noch erwähnt, dass durch die Forminvarianz von $\ddot{\Delta}_s, \dots \ddot{\Delta}_c, \dots$ höhere Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten definiert werden können.

5.5 Spannungstensoren und zugeordnete Geschwindigkeiten

Zu jedem Verzerrungs- und Krümmungstensor kann ein Spannungstensor mit Hilfe von geeignet definierten Spannungsleistungen zugeordnet werden. Dazu betrachten wir die Summe der Spannungsleistungen $W_s + W_c$ (vgl. (4.15), (4.16))

$$W_s + W_c = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{L} - \Omega) + \mathbf{S}_c \cdot \text{grad} \omega \quad (5.86)$$

und schreiben sie unter Berücksichtigung von (5.85) um:

$$W_s + W_c = (\mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c) \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{S}_c \cdot \overset{\square}{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{S}_c \cdot \overset{\square}{\mathbf{M}} \quad , \quad (5.87)$$

mit

$$\boldsymbol{\Sigma} := \mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c \quad . \quad (5.88)$$

Folgend GRAMMENOUDES & TSAKMAKIS [39] können verschiedene Spannungstensoren durch forminvariante Darstellung der Spannungsleistungen

$$W_1 := \boldsymbol{\Sigma} \cdot \overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad W_2 := \mathbf{S}_c \cdot \overset{\square}{\mathbf{M}} \quad (5.89)$$

eingeführt werden. So gilt z.B. relativ zur Bezugskonfiguration

$$W_1 = \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\bar{\mathbf{R}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}^{-1}) = (\bar{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^{T-1}) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad (5.90)$$

$$W_2 = \mathbf{S}_c \cdot (\bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}}^T) = (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}}) \cdot \dot{\mathbf{M}} \quad , \quad (5.91)$$

oder

$$W_1 = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} := \bar{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^{T-1} \quad , \quad (5.92)$$

$$W_2 = \tilde{\mathbf{S}}_c \cdot \dot{\mathbf{M}} \quad , \quad \tilde{\mathbf{S}}_c := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (5.93)$$

Obwohl in dieser Arbeit keine Spannungsgeschwindigkeiten verwendet werden, werden diese vollständigshalber kurz vorgestellt. Neben der Forminvarianz von W_1 , W_2 wird die Forminvarianz von \dot{W}_1 , \dot{W}_2 verlangt, wobei

$$\dot{W}_1 = \dot{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad (5.94)$$

$$\dot{W}_2 = \dot{\tilde{\mathbf{S}}}_c \cdot \dot{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{S}}_c \cdot \ddot{\mathbf{M}} \quad . \quad (5.95)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Terme $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\mathbf{S}}_c \cdot \ddot{\mathbf{M}}$ forminvariant sind. Demzufolge ist Forminvarianz von \dot{W}_1 , \dot{W}_2 äquivalent zur Forminvarianz von $\dot{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\dot{\tilde{\mathbf{S}}}_c \cdot \dot{\mathbf{M}}$. Diese Tatsache wird genutzt, um zugeordnete Spannungsgeschwindigkeiten zu definieren, die in den Tabellen im Anhang A angegeben sind.

6 Zerlegung der Deformation

6.1 Zwischenkonfiguration

Wie in klassischer Plastizität wird die *multiplikative Zerlegung* des Makrodeformationsgradienten \mathbf{F} in elastische und plastische Anteile

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (6.1)$$

mit $\det \mathbf{F}_e > 0$ (und daher $\det \mathbf{F}_p > 0$) angenommen. Diese Zerlegung wurde zuerst von KRÖNER [54] vorgeschlagen und ist in den nachfolgenden Jahren durch die Arbeiten von LEE & LIU [61] und LEE [62] populär geworden. Sie wird bis auf eine Starrkörperrotation als eindeutig angenommen (siehe hierzu GREEN & NAGHDI [45], CASEY & NAGHDI [14], [15]). STEINMANN [81] folgend wird zusätzlich die multiplikative Zerlegung der Mikrorotation $\bar{\mathbf{R}}$ auch in elastische und plastische Anteile angenommen

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p \quad , \quad (6.2)$$

wobei $\bar{\mathbf{R}}_e, \bar{\mathbf{R}}_p$ Rotationen darstellen. Auch diese Zerlegung wird bis auf dieselbe Starrkörperrotation für (6.1) als eindeutig angenommen.

Im Unterschied zu $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ist $\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, t)$ (und daher auch $\mathbf{F}_e(\mathbf{X}, t)$) eine inkompatible Deformation. Mit anderen Worten definiert $\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, t)$ für $t = \text{fest}$ eine lokale Deformation für das Makrokontinuum am Punkt \mathbf{X} . Die lokale Deformation verbunden mit $\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, t)$ bildet eine Umgebung $\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}$ auf eine Umgebung $\tilde{\mathcal{N}}(\hat{\mathbf{x}}, t) \in \mathcal{E}$ ab. Der Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ kann beliebig in \mathcal{E} ausgewählt werden, etwas was man sich mit Hilfe von lokalen Zerschneidungsprozessen für das Makrokontinuum vorstellen kann. Tatsächlich wird das Makrokontinuum lokal durch Zerschneidungsprozesse entlastet. Dadurch entstehen hinreichend kleine Teilchen, die nicht mehr zueinander passen (Verletzung der Kompatibilität) und daher beliebig in \mathcal{E} positioniert werden können (vgl. GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [40]). Insbesondere kann man sich $\hat{\mathbf{x}}$ durch eine beliebige Deformation

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (6.3)$$

vorgegeben denken. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass i.A. $\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, t) \neq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ gilt. Als besondere Möglichkeit ist $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{X}$ oder $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ zugelassen. Im Folgenden wird die fiktive (und darüber hinaus konzeptuelle) Deformation $\hat{\chi}(\cdot, t)$ als beliebig angesehen. Wir werden auch \hat{R}_t für den Raumbereich in \mathcal{E} schreiben, der vom makroskopischen Körper unter der Konfiguration $\hat{\chi}$ eingenommen wird, d.h. $\hat{R}_t = \hat{\chi}(R_R, t)$. Die Konfiguration $\hat{\chi}$, zusammen mit einer Kollektion

von lokalen Deformationen für \mathbf{F}_p , wird als (*plastische*) *Zwischenkonfiguration* des makroskopischen Kontinuums bezeichnet. Wir werden sagen, dass der makroskopische Körper in der plastischen Zwischenkonfiguration lokal durch \mathbf{F}_p deformiert wird. Während sich der makroskopische Körper lokal von \mathbf{X} auf $\hat{\mathbf{x}}$ deformiert, wird postuliert, dass das Mikrokontinuum am Punkt \mathbf{X} eine Rotation $\bar{\mathbf{R}}_p(\mathbf{X}, t)$ erfährt. Ortsvektoren \mathbf{X}' , die von \mathbf{X} ausgehen, transformieren sich zu Ortsvektoren $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\chi}'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) := \bar{\mathbf{R}}_p(\mathbf{X}, t) \mathbf{X}'$, die vom Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{R}_t$ ausgehen. Auf diese Weise wird der Raumbereich $R'_R(\mathbf{X})$ auf den Raumbereich $\hat{R}'_t(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\chi}'(\mathbf{X}, \mathbf{B}', t)$ abgebildet. Für $t = \text{fest}$ bezeichnen wir $\hat{\chi}'(\mathbf{X}, \cdot, t)$ als die plastische Zwischenkonfiguration des Mikrokontinuums am Punkt \mathbf{X} . Die plastische Zwischenkonfiguration für das Makrokontinuum zusammen mit derjenigen für das Mikrokontinuum wird plastische Zwischenkonfiguration des mikropolaren Kontinuums genannt. Die Deformation des mikropolaren Kontinuums von der Bezugs- auf die plastische Zwischenkonfiguration kann dann durch

$$(\mathbf{X}, t) \mapsto \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\chi}(\mathbf{X}, t) \\ \hat{\varphi}_i = \bar{\mathbf{R}}_p(\mathbf{X}, t) \Phi_i(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

charakterisiert werden.

Als Teilmenge des Euklidischen Punktraumes \mathcal{E} ist die plastische Zwischenkonfiguration des Makrokontinuums \hat{R}_t eine Euklidische Mannigfaltigkeit, die mit kartesischen Koordinaten $\{\hat{x}^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ überzogen werden kann. Die zugehörige Basis ist $\{\hat{\mathbf{e}}_\alpha\}$. Wir führen an dieser Stelle eine relative kovariante Ableitung in \hat{R}_t in Analogie zu (3.95) ein. Sei $\hat{\mathbf{b}}$ ein Vektorfeld auf \hat{R}_t und \mathbf{b} das Eulersche Gegenstück davon

$$\mathbf{b} := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{b}} \quad . \quad (6.5)$$

Wir definieren ein anholonomes Basissystem $\{\hat{\mathbf{E}}_\alpha\}$ in \hat{R}_t

$$\hat{\mathbf{E}}_\alpha \equiv \hat{\mathbf{E}}^\alpha := \delta^i_\alpha \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{e}_i \quad , \quad (6.6)$$

so dass die Vektoren $\hat{\mathbf{b}}$ und \mathbf{b} mit Hilfe von (6.5) und (6.6) folgendermaßen dargestellt werden können:

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{b}^\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} = \hat{b}^i \mathbf{e}_i \quad . \quad (6.7)$$

Desweiteren wird durch

$$\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}} := \left(\frac{\partial \hat{b}^\beta}{\partial x^\alpha} + \hat{\Lambda}^\beta_{\alpha\gamma} \hat{b}^\gamma \right) \hat{\mathbf{E}}_\beta \otimes \hat{\mathbf{E}}^\alpha \quad (6.8)$$

eine relative kovariante Ableitung von $\hat{\mathbf{b}}$ in \hat{R}_t definiert. Die "Push-Forward-Transformation" von $\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}$ mit $\bar{\mathbf{R}}_e$ liefert

$$\bar{\nabla}_p \mathbf{b} := \bar{\mathbf{R}}_e (\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{R}}_e^T = \left(\frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j} + \hat{\Lambda}^i_{jl} \hat{b}^l \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (6.9)$$

und stellt eine echte kovariante Ableitung in R_t dar. Die Menge R_t ausgerüstet mit der kovarianten Ableitung (6.9) wird zu einer Mannigfaltigkeit umgewandelt, die durch die Eigenschaften

des Zusammenhangs $\hat{\Lambda}_{jl}^i$ charakterisiert wird. Man kann natürlich $\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}$ auch in der Bezugskonfiguration durch "Pull-Back-Transformation" mit $\bar{\mathbf{R}}_p$ abbilden

$$\tilde{\nabla}_p \mathbf{B} := \bar{\mathbf{R}}_p^T (\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{R}}_p \equiv \bar{\mathbf{R}}^T (\bar{\nabla}_p \mathbf{b}) \bar{\mathbf{R}} = \left\{ \frac{\partial \hat{b}^B}{\partial x^A} + \hat{\Lambda}_{A\Gamma}^B \hat{b}^\Gamma \right\} \tilde{\mathbf{E}}_B \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A, \quad (6.10)$$

mit

$$\mathbf{B} := \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} = \hat{b}^A \tilde{\mathbf{E}}_A. \quad (6.11)$$

Der Ausdruck $\tilde{\nabla}_p \mathbf{B}$ in (6.10) bildet eine relative kovariante Ableitung von \mathbf{B} in der Bezugskonfiguration R_R . Schließlich sei hier noch erwähnt, dass in Analogie zu (3.29) die Zerlegungen

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{U}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \bar{\mathbf{R}}_e, \quad \mathbf{F}_p = \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{U}}_p = \bar{\mathbf{V}}_p \bar{\mathbf{R}}_p \quad (6.12)$$

gelten, wobei $\bar{\mathbf{U}}_e, \bar{\mathbf{V}}_p$ Endomorphismen auf $T_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{R}_t$, $\bar{\mathbf{U}}_p$ Endomorphismus auf $T_{\mathbf{X}} R_R$ und $\bar{\mathbf{V}}_e$ Endomorphismus auf $T_{\mathbf{X}} R_t$ sind.

6.2 Additive Zerlegung der mikropolaren Verzerrungstensoren

Sei $\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}) \subset R_R$ eine Umgebung von \mathbf{X} in der Bezugskonfiguration R_R , welche die materielle Linie mit dem Ortsvektor $\mathbf{A}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{I}$ enthält. Wie in Abschnitt 5.2 gezeigt wurde, besitzt die materielle Linie an der Stelle $\mathbf{X} = \mathbf{A}(\lambda_0)$ den Tangentenvektor $\mathcal{A} = \frac{d\mathbf{A}(\lambda_0)}{d\lambda}$ (vgl. Abb. 6.1). Sei $\hat{\zeta} : \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}) \times \mathbb{I} \rightarrow \hat{\mathcal{N}}(\hat{\mathbf{x}}, t) \subset \hat{R}_t$ eine lokale Deformation mit der Eigenschaft

$$\hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) = \hat{\chi}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}, \quad (6.13)$$

wobei jedoch i.A. $\hat{\zeta}(\mathbf{Y}, t) \neq \hat{\chi}(\mathbf{X}, t)$ für $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$ gilt. Wir setzen $\hat{\mathcal{N}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \hat{\zeta}(\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}), t)$, so dass $\hat{\mathcal{N}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ mit $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\zeta}(\mathbf{A}(\lambda_0), t)$ das Bild der materiellen Linie $\mathbf{A}(\lambda)$ enthält. Ferner nehmen wir

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \hat{\zeta}(\mathbf{Y}, t)}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{\mathbf{Y}=\mathbf{X}} = (\mathbf{F}_p)^\alpha{}_A \hat{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \mathbf{E}^A \quad (6.14)$$

an. Sei $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}(\lambda, t) = \hat{\zeta}(\mathbf{A}(\lambda), t)$ das Bild von $\mathbf{A}(\lambda)$ unter der Abbildung $\hat{\zeta}(\cdot)$ für $t = \text{fest}$ und $\hat{\alpha} = \frac{d\hat{\mathbf{A}}(\lambda_0, t)}{d\lambda}$ der Tangentenvektor an der Stelle $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(\lambda_0, t)$. Vollkommen analog zum Abschnitt 5.2.1 gilt

$$\alpha = \mathbf{F} \mathcal{A} = \mathbf{F}_e \hat{\alpha}, \quad \hat{\alpha} = \mathbf{F}_p \mathcal{A} = \mathbf{F}_e^{-1} \alpha. \quad (6.15)$$

Zusätzlich führen wir den Vektor

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\mathbf{X}, t) := \bar{\mathbf{R}}_p(\mathbf{X}, t) \Phi = \bar{\mathbf{R}}_e^T(\mathbf{X}, t) \varphi \quad (6.16)$$

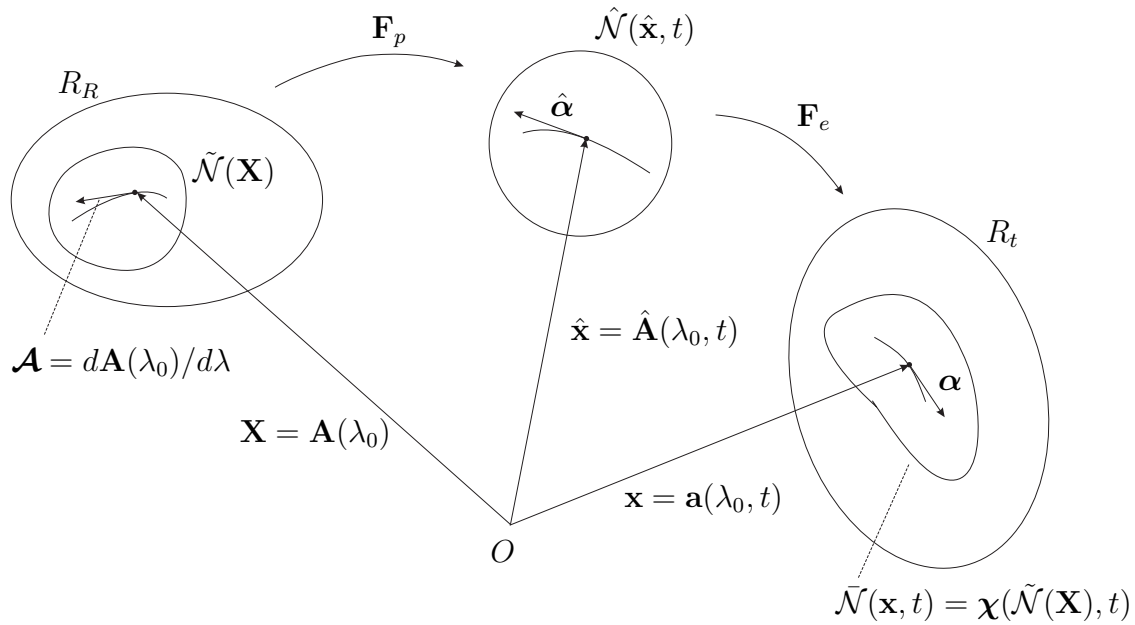


Abbildung 6.1: Geometrische Andeutung der multiplikativen Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$.

ein, der ähnlich wie $\Phi(\mathbf{X})$ und $\varphi(\mathbf{x}, t)$ einen Ortsvektor des Mikrokontinuums in $\hat{R}'_t(\mathbf{x})$ darstellen möge.

Ausgehend von (5.13) ist es naheliegend die *additive Zerlegung* von Δ_s

$$\Delta_s = (\Delta_s)_e + (\Delta_s)_p \quad , \quad (6.17)$$

$$(\Delta_s)_e := \varphi \cdot \alpha - \hat{\varphi} \cdot \hat{\alpha} \quad , \quad (6.18)$$

$$(\Delta_s)_p := \hat{\varphi} \cdot \hat{\alpha} - \Phi \cdot \mathcal{A} \quad , \quad (6.19)$$

als ein Maß für die Geometrie der Deformation in Beziehung zu der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{N}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ zu betrachten. Ähnlich wie Δ_s können $(\Delta_s)_e$ oder $(\Delta_s)_p$ forminvariant dargestellt werden. So gilt beispielsweise relativ zu der Bezugsconfiguration R_R

$$(\Delta_s)_e = \Phi \cdot \tilde{\epsilon}_e \mathcal{A} \quad , \quad (\Delta_s)_p = \Phi \cdot \tilde{\epsilon}_p \mathcal{A} \quad , \quad (6.20)$$

$$\tilde{\epsilon}_p = \bar{\mathbf{U}}_p - \mathbf{1} \quad , \quad \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_e + \tilde{\epsilon}_p \quad . \quad (6.21)$$

Weitere Beziehungen dieser Art, sowie zugeordnete Geschwindigkeiten sind in den Tabellen im Anhang A angegeben. Diese sind identisch gleich zu den Ausführungen in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] und vervollständigen die wesentlichen Informationen über die Verzerrungstensenoren im Rahmen der Zerlegung der Deformation. Dabei wird von der Notation

$$\hat{\Omega}_p := \dot{\hat{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad (6.22)$$

Gebrauch gemacht.

6.3 Additive Zerlegung von Δ_c

Wir benutzen dieselbe Vorgehensweise wie im letzten Abschnitt und zerlegen die Differenz Δ_c in (5.18) gemäß

$$\Delta_c = (\Delta_c)_e + (\Delta_c)_p \quad , \quad (6.23)$$

$$(\Delta_c)_e := \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2)[\varphi_3] - \hat{\varphi}_1 \cdot (\hat{\nabla}_p \hat{\varphi}_2)[\hat{\varphi}_3] \quad , \quad (6.24)$$

$$(\Delta_c)_p := \hat{\varphi}_1 \cdot (\hat{\nabla}_p \hat{\varphi}_2)[\hat{\varphi}_3] - \Phi_1 \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{U}}} \Phi_2)[\Phi_3] \quad , \quad (6.25)$$

wobei

$$\hat{\varphi}_\alpha = \hat{\varphi}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t) := \delta_\alpha^A \bar{\mathbf{R}}_p \Phi_A = \delta_\alpha^i \bar{\mathbf{R}}_e^T \varphi_i \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (6.26)$$

gilt. Aus (6.8) folgt dann

$$\hat{\nabla}_p \hat{\varphi}_2 = \left(\frac{\partial(\hat{\varphi}_2)^\beta}{\partial x^\alpha} + \hat{\Lambda}_{\alpha\gamma}^\beta (\hat{\varphi}_2)^\gamma \right) \hat{\mathbf{E}}_\beta \otimes \hat{\mathbf{E}}^\alpha \quad . \quad (6.27)$$

Mit den Komponentendarstellungen

$$\varphi_i = (\varphi_i)^j \mathbf{e}_j \quad , \quad \hat{\varphi}_\alpha = \delta_\alpha^i \bar{\mathbf{R}}_e^T \varphi_i = \delta_\alpha^i (\varphi_i)^\beta \hat{\mathbf{E}}_\beta \quad , \quad (6.28)$$

sowie mit Hilfe der Beziehungen (5.25) bis (5.28) und (6.9) erhält man

$$(\Delta_c)_e = \varphi_1 \cdot (\nabla_t \varphi_2 - \bar{\nabla}_p \varphi_2)[\varphi_3] \quad , \quad (6.29)$$

$$(\Delta_c)_p = \varphi_1 \cdot (\bar{\nabla}_p \varphi_2 - \bar{\nabla}_t \varphi_2)[\varphi_3] \quad , \quad (6.30)$$

mit

$$\nabla_t \varphi_2 = \frac{\partial(\varphi_2)^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad , \quad (6.31)$$

$$\bar{\nabla}_p \varphi_2 = \left(\frac{\partial(\varphi_2)^i}{\partial x^j} + \hat{\Lambda}_{jl}^i (\varphi_2)^l \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad , \quad (6.32)$$

$$\bar{\nabla}_t \varphi_2 = \left(\frac{\partial(\varphi_2)^i}{\partial x^j} + (\bar{\Lambda}_t)^i_{jl} (\varphi_2)^l \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad . \quad (6.33)$$

Während $(\bar{\Lambda}_t)^i_{jl}$ durch (5.28) gegeben ist, muss $\hat{\Lambda}_{jl}^i$ aus noch zu formulierenden Materialgleichungen bestimmt werden.

6.3.1 Additive Zerlegung der dreistufigen mikropolaren Krümmungstensoren

Aus (6.29) bis (6.33) ergibt sich

$$(\Delta_c)_e = \left\{ (0 - \hat{\Lambda}_{jl}^i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^j \right\} [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \mathcal{M}_e[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad , \quad (6.34)$$

$$(\Delta_c)_p = \left\{ (\hat{\Lambda}_{jl}^i - (\bar{\Lambda}_t)^i_{jl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^j \right\} [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \mathcal{M}_p[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad , \quad (6.35)$$

mit

$$\mathcal{M}_e := (0 - \hat{\Lambda}_{jl}^i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^j \quad , \quad (6.36)$$

$$\mathcal{M}_p := (\hat{\Lambda}_{jl}^i - (\bar{\Lambda}_t)^i_{jl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^j \quad , \quad (6.37)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_p = (0 - (\bar{\Lambda}_t)^i_{jl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^j \quad . \quad (6.38)$$

Man erkennt, dass beispielsweise die Komponenten $(\mathcal{M}_e)^i_{jl} \equiv (\mathcal{M}_e)_{ijl}$ von \mathcal{M}_e relativ zu der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ durch die Differenz von Symbolen von Zusammenhängen $(0 - \hat{\Lambda}_{jl}^i)$ gegeben sind, wobei die Null für den Levi-Civita Zusammenhang der Euklidischen Mannigfaltigkeit R_t steht.

Andererseits kann R_t auch als nicht-Euklidische Mannigfaltigkeit durch Übertragung der geometrischen Eigenschaften von \hat{R}_t folgendermassen aufgefasst werden: Seien $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \in T_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{R}_t$ zwei beliebige Vektoren mit $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{b}}$ als die entsprechenden Eulerschen Gegenstücke. Ferner sei durch

$$\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) := \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{1b} \quad (6.39)$$

eine Euklidische Metrik auf \hat{R}_t definiert. Diese überträgt sich durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{b} \quad (6.40)$$

auf die Euklidische Metrik

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{1b} \quad (6.41)$$

für R_t . Jetzt nehmen wir an, dass $\hat{\Lambda}_{jl}^i$ Objekte eines metrischen Zusammenhanges für R_t relativ zu der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ sind und dass die Metrik durch die Euklidische Metrik (6.41) gegeben ist. Dann verschwinden in (2.126) alle Terme bis auf den Klammerausdruck mit den Komponenten des Torsionstensors

$$\hat{\Lambda}_{jl}^i \equiv \hat{\Lambda}_{ijl} = \frac{1}{2} (\mathcal{T}_{jl}^i + \mathcal{T}_l^i{}_j - \mathcal{T}_{jl}^i) \quad , \quad (6.42)$$

mit (vgl. (2.121))

$$\mathcal{T}_{jk}^i \equiv \mathcal{T}^{ijk} = (\hat{\Lambda}_{jk}^i - \hat{\Lambda}_{kj}^i) \equiv (\hat{\Lambda}_{ijk} - \hat{\Lambda}_{ikj}) \quad . \quad (6.43)$$

Folglich kann der Raum R_t , ausgerüstet mit der Metrik (6.41) und dem Zusammenhang $\hat{\Lambda}_{jl}^i$, als nicht-Euklidischer und nicht-Riemannscher (da Torsion vorhanden ist) Raum aufgefasst werden.

Anhand von (6.42) und (6.43) sieht man sofort, dass $\hat{\Lambda}_{ijl}$ antisymmetrisch in Bezug auf die Indizes i, l sein muss:

$$\hat{\Lambda}_{ijl} = -\hat{\Lambda}_{lji} \quad . \quad (6.44)$$

Dies impliziert folgende Antisymmetrie für die Komponenten von \mathcal{M}_e (vgl. (6.36))

$$(\mathcal{M}_e)_{ilj} = (0 - \hat{\Lambda}_{ijl}) = -(\mathcal{M}_e)_{lij} \quad . \quad (6.45)$$

Nun besitzen die Komponenten von \mathcal{M} genau dieselbe Antisymmetrie (s. (5.31)). Deswegen müssen die Komponenten von \mathcal{M}_p auch diese Antisymmetrie aufweisen. Als Konsequenz erhält man folgende Darstellungen: Ist \mathcal{M}^* einer von den Tensoren \mathcal{M} , \mathcal{M}_e , \mathcal{M}_p , so gibt es einen axialen Tensor zweiter Stufe \mathbf{M}^* mit

$$\mathcal{M}^*[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{M}^* \times \mathbf{b})[\mathbf{c}] \quad , \quad (6.46)$$

für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ oder in indizierter Schreibweise relativ zu $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\mathcal{M}_{ijk}^* = \epsilon_{jim} M_{mk}^* \quad . \quad (6.47)$$

Im Falle von $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$ und $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}$ gelten die speziellen Zerlegungen

$$\mathcal{M} = \Gamma_i \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad \mathbf{M} = \gamma_i \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad \gamma_i = \text{axl } \Gamma_i \quad . \quad (6.48)$$

Solche Zerlegungen müssen aber für \mathcal{M}_e und \mathcal{M}_p i.A. nicht gelten. (Ein wichtiger Sonderfall wird weiter unten diskutiert.) An dieser Stelle sei noch gemerkt, dass i.d.R. \mathcal{M}_p aus einer Materialgleichung bestimmt wird. Vorausgesetzt, dass \mathcal{M} beispielsweise aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bekannt ist, wird somit \mathcal{M}_e und daher auch $\hat{\Lambda}_{jl}^i$ bestimmt sein.

Abschließend sei erwähnt, dass die Differenzen $(\Delta_c)_e$ und $(\Delta_c)_p$ forminvariant relativ zu \hat{R}_t oder R_R dargestellt werden können:

$$(\Delta_c)_e = \hat{\mathcal{M}}_e[\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3] = \tilde{\mathcal{M}}_e[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \quad , \quad (6.49)$$

$$(\Delta_c)_p = \hat{\mathcal{M}}_p[\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3] = \tilde{\mathcal{M}}_p[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \quad , \quad (6.50)$$

mit

$$\hat{\mathcal{M}}_e = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}^T)[\mathcal{M}_e] \quad , \quad \tilde{\mathcal{M}}_e = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}^T)[\mathcal{M}_e] \quad , \quad (6.51)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_p = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}^T)[\mathcal{M}_p] \quad , \quad \tilde{\mathcal{M}}_p = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}^T)[\mathcal{M}_p] \quad . \quad (6.52)$$

Zugeordnete objektive Geschwindigkeiten können mit Hilfe der Forminvarianz von $(\Delta_c)_e$, $(\Delta_c)_p$ vollkommen analog zu der Vorgehensweise in Kapitel 5.4 eingeführt werden. Insgesamt ergeben sich Beziehungen, wie sie in den Tabellen im Anhang A dokumentiert sind.

6.3.2 Additive Zerlegung der zweistufigen mikropolaren Krümmungstensoren

Die Ergebnisse vom letzten Abschnitt machen deutlich, dass

$$(\Delta_c)_e = \mathcal{M}_e[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1 \cdot (\mathbf{M}_e \times \varphi_2)[\varphi_3] = (\mathbf{M}_e \times \varphi_2)[\varphi_1, \varphi_3] \quad , \quad (6.53)$$

$$(\Delta_c)_p = \mathcal{M}_p[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1 \cdot (\mathbf{M}_p \times \varphi_2)[\varphi_3] = (\mathbf{M}_p \times \varphi_2)[\varphi_1, \varphi_3] \quad (6.54)$$

gilt, wobei \mathbf{M}_e und \mathbf{M}_p axiale Tensoren jeweils von \mathcal{M}_e und \mathcal{M}_p sind. Hält man sich noch (5.44) vor Augen, so sieht man leicht, dass

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_p \quad (6.55)$$

gilt. Während \mathbf{M} der Zerlegung

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad (6.56)$$

genügt, brauchen solche Zerlegungen für \mathbf{M}_e und \mathbf{M}_p i.A. nicht zu gelten. Forminvariante Formulierungen von $(\Delta_c)_e$, $(\Delta_c)_p$, $(\Delta_c)_e^\cdot$, $(\Delta_c)_p^\cdot$ liefern Gegenstücke von \mathbf{M}_e und \mathbf{M}_p relativ zu \hat{R}_t und R_R , sowie zugeordnete Geschwindigkeiten. Alle relevante Beziehungen dieser Art sind im Anhang angegeben.

6.3.3 Der Sonderfall $\hat{\Lambda}_{ki}^j = (\bar{\mathbf{R}}_e)^j_{\varrho} \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})_{\varrho}^i}{\partial x^k}$

In Analogie zu (3.42) führen wir die Notation

$$\bar{\mathbf{R}}_e = (\bar{\mathbf{R}}_e)^i_{\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^{\alpha}, \quad \bar{\mathbf{R}}_e^{-1} = (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})^{\alpha}_i \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}^i \quad \text{mit} \quad (\bar{\mathbf{R}}_e)^i_{\alpha} = (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})^{\alpha}_i, \quad (6.57)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p = (\bar{\mathbf{R}}_p)^{\alpha}_A \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \otimes \mathbf{E}^A, \quad \bar{\mathbf{R}}_p^{-1} = (\bar{\mathbf{R}}_p^{-1})^A_{\alpha} \mathbf{E}_A \otimes \hat{\mathbf{e}}^{\alpha} \quad \text{mit} \quad (\bar{\mathbf{R}}_p)^{\alpha}_A = (\bar{\mathbf{R}}_p^{-1})^A_{\alpha}, \quad (6.58)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^{\alpha} \cdot \mathbf{e}_i = (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})^{\alpha}_i \quad (6.59)$$

ein und betrachten den speziellen Fall

$$\hat{\Lambda}_{ki}^j \equiv \hat{\Lambda}_{jki} := (\bar{\mathbf{R}}_e)^j_{\varrho} \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e^T)_{\varrho}^i}{\partial x^k} = -\frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e)^j_{\varrho}}{\partial x^k} (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})_{\varrho}^i. \quad (6.60)$$

Wir werden zeigen, dass dies äquivalent zu (vgl. (6.8))

$$\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial x^{\alpha}} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial x^i} \otimes \mathbf{e}^i \right) \bar{\mathbf{R}}_e = (\text{grad} \hat{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{R}}_e \quad (6.61)$$

ist und damit $\hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}$ einen relativen Gradient darstellt. Dazu benutzen wir die Beziehungen

$$\hat{\mathbf{E}}_{\gamma} = \delta^i_{\gamma} \bar{\mathbf{R}}_e^{-1} \mathbf{e}_i = \delta^i_{\gamma} (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})_{\varrho}^i \hat{\mathbf{e}}_{\varrho}, \quad (6.62)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\varrho} = \delta^{\beta}_i (\bar{\mathbf{R}}_e)^i_{\varrho} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \quad (6.63)$$

in $\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial x^{\alpha}} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha}$. Somit erhalten wir (vgl. (6.7))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial x^{\alpha}} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} &= \frac{\partial(\hat{b}^{\beta} \hat{\mathbf{E}}_{\beta})}{\partial x^{\alpha}} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} = \frac{\partial \hat{b}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} + \hat{b}^{\gamma} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} \\ &= \frac{\partial \hat{b}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} + \hat{b}^{\gamma} \delta^i_{\gamma} \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})_{\varrho}^i}{\partial x^{\alpha}} \delta^{\beta}_j (\bar{\mathbf{R}}_e)^j_{\varrho} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} \\ &= \left\{ \frac{\partial \hat{b}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \delta^{\beta}_j \delta^i_{\gamma} \delta^{\alpha}_k (\bar{\mathbf{R}}_e)^j_{\varrho} \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})_{\varrho}^i}{\partial x^k} \hat{b}^{\gamma} \right\} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} \\ &= \left\{ \frac{\partial \hat{b}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \delta^{\beta}_j \delta^i_{\gamma} \delta^{\alpha}_k \hat{\Lambda}_{ki}^j \hat{b}^{\gamma} \right\} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} \\ &= \left\{ \frac{\partial \hat{b}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \hat{\Lambda}_{\alpha\gamma}^{\beta} \hat{b}^{\gamma} \right\} \hat{\mathbf{E}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{E}}^{\alpha} = \hat{\nabla}_p \hat{\mathbf{b}}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

was zu beweisen war. Ohne Beweis erwähnen wir hier, dass man mit vollkommen ähnlichen Methoden wie in Abschnitt 3.4.3 aufzeigen kann, dass der Riemansche Krümmungstensor für den Zusammenhang (6.60) verschwindet. Anders ausgedrückt wird der Raum R_t ausgerüstet mit diesem Zusammenhang flach. Jedoch bleibt er weiterhin nicht-Euklidisch und nicht-Riemannsch. Im Falle, dass der Ansatz (6.60) zugrundegelegt wird, müssen eventuelle Materialgleichungen für \mathcal{M}_p bzw. für \mathbf{M}_p Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, da in (6.60) räumliche Ableitungen von $\bar{\mathbf{R}}_e$ vorkommen.

Anhand von (6.36) sieht man, dass für den Sonderfall (6.60)

$$\mathcal{M}_e = \frac{\partial(\bar{\mathbf{R}}_e)^j}{\partial x^k} (\bar{\mathbf{R}}_e^{-1})^e{}_i \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^k \quad , \quad (6.65)$$

oder

$$\mathcal{M}_e = \text{grad} \bar{\mathbf{R}}_e \diamond \bar{\mathbf{R}}_e^T = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_e}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}_e^T \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad (6.66)$$

bzw.

$$\mathcal{M}_e = (\Gamma_e)_i \otimes \mathbf{e}^i \quad \text{mit} \quad (\Gamma_e)_i := \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_e}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}_e^T \quad (6.67)$$

gilt. Also ist \mathcal{M}_e für den Sonderfall gemäß (6.66) zerlegbar. Da $\mathcal{M} = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_p$ und \mathcal{M} der Zerlegung (5.35) genügt, folgt, dass auch \mathcal{M}_p einer Zerlegung

$$\mathcal{M}_p = (\Gamma_p)_i \otimes \mathbf{e}^i \quad \text{mit} \quad (\Gamma_p)_i = \Gamma_i - (\Gamma_e)_i \quad (6.68)$$

genügt. Die Zerlegungen für \mathcal{M}_e , \mathcal{M}_p induzieren Zerlegungen auch für \mathbf{M}_e , \mathbf{M}_p . In der Tat, da Γ_i , $(\Gamma_e)_i$ antisymmetrisch sind, muß auch $(\Gamma_p)_i$ antisymmetrisch sein, und es gilt

$$\mathbf{M}_e = (\gamma_e)_i \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad \mathbf{M}_p = (\gamma_p)_i \otimes \mathbf{e}^i \quad , \quad (6.69)$$

$$(\gamma_e)_i = \text{axl}(\Gamma_e)_i \quad , \quad (\gamma_p)_i = \text{axl}(\Gamma_p)_i \quad . \quad (6.70)$$

Weitere Beziehungen und Zusammenhänge der Darstellungen relativ zu den verschiedenen Konfigurationen sind Anhang A zu entnehmen.

6.4 Spannungstensoren

In Abschnitt 5.5 sind die Spannungstensoren Σ , \mathbf{S}_e relativ zur Momentankonfiguration R_t bzw. $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\mathbf{S}}_e$ relativ zur Bezugskonfiguration R_R durch forminvariante Darstellung der Spannungsleistung W_1 bzw. W_2 eingeführt worden. Um Spannungen relativ zur Zwischenkonfiguration \hat{R}_t einführen zu können, benutzen wir in (5.89) die Beziehungen (vgl. Anhang A)

$$\overset{\square}{\epsilon} = \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\square}{\hat{\epsilon}} \mathbf{F}_e^{-1} \quad , \quad \overset{\square}{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\square}{\hat{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{R}}_e^T \quad , \quad (6.71)$$

und erhalten

$$W_1 = \Sigma \cdot (\bar{\mathbf{R}}_e \overset{\square}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_e^{-1}) = (\bar{\mathbf{R}}_e^T \Sigma \mathbf{F}_e^{T-1}) \cdot \overset{\square}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} , \quad (6.72)$$

$$W_2 = \mathbf{S}_c \cdot (\bar{\mathbf{R}}_e \overset{\square}{\hat{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{R}}_e^T) = (\bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}}_e) \cdot \overset{\square}{\hat{\mathbf{M}}} , \quad (6.73)$$

oder

$$W_1 = \hat{\Sigma} \cdot \overset{\square}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} , \quad \hat{\Sigma} := \bar{\mathbf{R}}_e^T \Sigma \mathbf{F}_e^{T-1} , \quad (6.74)$$

$$W_2 = \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \overset{\square}{\hat{\mathbf{M}}} , \quad \hat{\mathbf{S}}_c := \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}}_e . \quad (6.75)$$

Die Spannungen $\hat{\Sigma}$ und $\hat{\mathbf{S}}_c$ relativ zu \hat{R}_t werden zur Formulierung der Materialtheorie im nächsten Kapitel eingesetzt. Dort werden auch weitere, so genannte Mandelsche Spannungstensoren eingeführt. Transformationsbeziehungen zwischen den verschiedenen Spannungstensoren und deren Geschwindigkeiten sind am Ende von Anhang A zu finden.

7 Thermodynamischer Rahmen

Wir nehmen isotherme Deformationen mit homogener Temperaturverteilung an. Die *Clausius-Duhem-Ungleichung* relativ zur Momentankonfiguration R_t lautet (s. ERINGEN [32], Kap. 2.3)

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{S}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} - \varrho_R \dot{\Psi} \geq 0 \quad , \quad (7.1)$$

oder äquivalenterweise

$$\hat{\Sigma} \cdot \hat{\epsilon} + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}} - \varrho_R \dot{\Psi} \geq 0 \quad , \quad (7.2)$$

bzw. relativ zur Zwischenkonfiguration \hat{R}_t

$$\hat{\Sigma} \cdot \hat{\epsilon} + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}} - \varrho_R \dot{\Psi} \geq 0 \quad , \quad (7.3)$$

wobei Ψ die (pro Masseneinheit des makroskopischen Kontinuums) *spezifische freie Energie* des mikropolaren Kontinuums bedeutet. Wie üblich in der nicht polaren Plastizitätstheorie wird die Zerlegung von Ψ in elastische und plastische Anteile angenommen. Es wird weiter angenommen, dass diese Zerlegung auch bei mikropolarer Plastizität gültig ist, so dass man

$$\Psi(t) = \Psi_e(t) + \Psi_p(t) \quad (7.4)$$

schreiben kann. Damit ist die Ungleichung (7.3) äquivalent zu

$$\hat{\Sigma} \cdot \hat{\epsilon} + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}} - \varrho_R \dot{\Psi}_e - \varrho_R \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \quad (7.5)$$

7.1 Elastizitätsgesetze-Dissipationsungleichung

In Analogie zum rein elastischen Fall in (5.7) wird angesetzt, dass sich der elastische Anteil der freien Energiefunktion Ψ_e als eine Funktion von $\hat{\epsilon}_e$ und $\hat{\mathbf{M}}_e$ schreiben lässt:

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e, \hat{\mathbf{M}}_e) \quad . \quad (7.6)$$

Bei Überlagerung von Starrkörperrotationen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ auf die Momentankonfiguration und $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_p(t)$ auf die Zwischenkonfiguration gelten Transformationsbeziehungen der Form (vgl.

GRAMMENOU DIS & TSAKMAKIS [39])

$$\mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \mathbf{Q}_p^T, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad (7.8)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_e \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_e^* = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{R}}_e \mathbf{Q}_p^T, \quad (7.9)$$

$$\bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}^* = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{R}}, \quad (7.10)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_e \rightarrow \bar{\mathbf{U}}_e^* = \mathbf{Q}_p \bar{\mathbf{U}}_e \mathbf{Q}_p^T, \quad (7.11)$$

etc. Mit diesen Beziehungen und mit der üblichen Annahme $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$ kann gezeigt werden, dass

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \rightarrow \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^* = \mathbf{Q}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \mathbf{Q}_p^T, \quad (7.12)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_e \rightarrow \hat{\mathbf{M}}_e^* = \mathbf{Q}_p \hat{\mathbf{M}}_e \mathbf{Q}_p^T, \quad (7.13)$$

und somit

$$\Psi_e^* = \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^*, \hat{\mathbf{M}}_e^*) = \hat{\Psi}_e(\mathbf{Q}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \mathbf{Q}_p^T, \mathbf{Q}_p \hat{\mathbf{M}}_e \mathbf{Q}_p^T) \quad (7.14)$$

gilt. Für beliebige Rotationen \mathbf{Q}_p verlangen wir (Prinzip der materiellen Objektivität), dass

$$\Psi_e^* = \Psi_e, \quad (7.15)$$

oder äquivalenterweise

$$\hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{M}}_e) = \hat{\Psi}_e(\mathbf{Q}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \mathbf{Q}_p^T, \mathbf{Q}_p \hat{\mathbf{M}}_e \mathbf{Q}_p^T) \quad (7.16)$$

gilt. Letzte Gleichung legt fest, dass $\hat{\Psi}_e$ eine isotrope Tensorfunktion sein muß, d.h. Ψ_e ist eine Funktion der Invarianten von $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S$, $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_A$, $(\hat{\mathbf{M}}_e)_S$, $(\hat{\mathbf{M}}_e)_A$. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass Beziehungen der Form

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S = \bar{\mathbf{R}}_p \{(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1}\}_S \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (7.17)$$

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p \{(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1}\}_A \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (7.18)$$

$$(\hat{\mathbf{M}}_e)_S = \bar{\mathbf{R}}_p (\tilde{\mathbf{M}}_e)_S \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (7.19)$$

$$(\hat{\mathbf{M}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p (\tilde{\mathbf{M}}_e)_A \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (7.20)$$

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S (\hat{\mathbf{M}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p \left(\{(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1}\}_S (\tilde{\mathbf{M}}_e)_A \right) \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (7.21)$$

usw. gelten. Dies wiederum bedeutet, dass Ψ_e als Funktion von $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{M}}_p$ geschrieben werden kann:

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{M}}_e) = \tilde{\Psi}_e(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}_p). \quad (7.22)$$

Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit liefert

$$\dot{\Psi}_e = \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}_p} = \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{M}}_e}. \quad (7.23)$$

Nach einigen Umrechnungen und Zusammenfassen von Termen und unter Berücksichtigung der Beziehungen im Anhang A erhält man

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_p^T - \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{R}}_p^T - \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{M}} + \left(\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \mathbf{F}_p^T + (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \\ & + \left(\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \bar{\mathbf{R}}_p^T + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{M}}_p + \left\{ \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \hat{\mathbf{M}}_e^T - \hat{\mathbf{M}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.24)$$

Wir verlangen die Gültigkeit dieser Gleichung für beliebige Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\hat{\mathbf{M}}$ und $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\hat{\mathbf{M}}_p$, $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_p$, was gleichbedeutend mit beliebigen Evolutionsgleichungen für $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\hat{\mathbf{M}}_p$ und $\bar{\mathbf{R}}_p$ ist. Dies kann genau dann erfüllt werden, wenn

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_p^T = \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{R}}_p^T = \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \quad , \quad (7.25)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \mathbf{F}_p^T = -(\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \bar{\mathbf{R}}_p^T = -\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \quad , \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \hat{\mathbf{M}}_e^T - \hat{\mathbf{M}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} = \text{symmetrisch} \quad (7.27)$$

gilt. Wir kehren zur Ungleichung (7.5) zurück und setzen (7.6) für Ψ_e ein:

$$\begin{aligned} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_e + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{M}}}_e - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \hat{\mathbf{L}}_p) \\ & + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_e + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\mathbf{M}}_e + \hat{\mathbf{M}}_e \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p^T) - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \hat{\mathbf{L}}_p) \\ & + \left(\hat{\mathbf{S}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{M}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\mathbf{M}}_e - \hat{\mathbf{M}}_e \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p) - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p) \\ & + \left(\hat{\mathbf{S}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{M}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \hat{\mathbf{M}}_e^T - \hat{\mathbf{M}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

oder nach Zusammenfassen von Termen

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\Sigma} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \right) \cdot \hat{\epsilon}^{\square} + \left(\hat{S}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \right) \cdot \hat{M}^{\square} + \varrho_{\mathcal{R}} (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \hat{\epsilon}_p^{\square} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \cdot \hat{M}_p^{\square} \\ & - \varrho_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \hat{\epsilon}_e^T - \hat{\epsilon}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \hat{M}_e^T - \hat{M}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \right) \cdot \hat{\Omega}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Gemäß (7.27) ist der Ausdruck in der Klammer im vorletzten Term von (7.29) symmetrisch, so dass das innere Produkt mit dem antisymmetrischen Tensor $\hat{\Omega}_p$ verschwindet:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\Sigma} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \right) \cdot \hat{\epsilon}^{\square} + \left(\hat{S}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \right) \cdot \hat{M}^{\square} \\ & + \varrho_{\mathcal{R}} (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \hat{\epsilon}_p^{\square} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \cdot \hat{M}_p^{\square} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Zur Auswertung dieser Ungleichung machen wir die konstitutiven Annahmen

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon}_e, \hat{M}_e) \quad , \quad \hat{S}_c = \hat{S}_c(\hat{\epsilon}_e, \hat{M}_e) \quad . \quad (7.31)$$

In Worten: $\hat{\Sigma}$ und \hat{S}_c hängen nicht von Geschwindigkeiten ab.

Die Ungleichung (7.3) bzw. (7.30) muß außerdem für alle $\hat{\epsilon}^{\square}, \hat{M}^{\square}$ erfüllt bleiben. Nach Standardargumenten (vgl. COLEMAN AND GURTIN [20]) ist dies möglich, wenn aus (7.30)

$$\hat{\Sigma} = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} = \varrho_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\epsilon}} \mathbf{F}_p^T \quad , \quad \hat{S}_c = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} = \varrho_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{M}} \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (7.32)$$

$$\mathcal{D}_{int} := (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \hat{\epsilon}_p^{\square} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{M}_e} \cdot \hat{M}_p^{\square} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad (7.33)$$

folgt. Wir bezeichnen (7.33) als (*innere*) *Dissipationsungleichung*.

Es ist zweckmäßig an dieser Stelle einen sog. *Mandelschen Spannungstensor*

$$\hat{\mathbf{P}} := (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \hat{\Sigma} = \varrho_{\mathcal{R}} (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \quad (7.34)$$

einzuführen. Dies ist analog zu dem Mandelschen Spannungstensor in klassischer Plastizität (s. dazu z.B. TSAKMAKIS [88]). Damit kann die Dissipationsungleichung folgendermassen formuliert werden

$$\mathcal{D}_{int} := \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p^{\square} + \hat{S}_c \cdot \hat{M}_p^{\square} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \quad (7.35)$$

Die Gleichungen (7.32) stellen die *Elastizitätsgesetze* unserer mikropolarer Plastizitätstheorie dar. Diese zwei Gleichungen, zusammen mit der Dissipationsungleichung (7.35), sind im Fall der Viskoplastizität notwendige und hinreichende Bedingungen und im Falle der Plastizität nur hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Clausius-Duhem-Ungleichung (7.1) bzw. (7.5).

7.2 Postulat von Il'iushin-Fließregeln für Plastizität

In Analogie zur klassischen assoziierten Plastizität werden wir das *Postulat von Il'iushin* geeignet verallgemeinert für mikropolare Plastizität annehmen, um eine *Normalenregel* für $\hat{\epsilon}_p$ und $\hat{\mathbf{M}}_p$ zu motivieren.

Es wird die Existenz einer *Fließfunktion* im Raum der Spannungen und Momentenspannungen vorausgesetzt, die relativ zu \hat{R}_t die Form

$$f(t) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c, \hat{\mathbf{h}}) \quad (7.36)$$

hat. Hierin bezeichnet $\hat{\mathbf{h}}$ eine Menge aus inneren Zustandsvariablen (*Verfestigungsvariablen*) \hat{h}_i , $0 \leq i \leq M$, die skalarwertig sind oder die Komponenten eines Tensors darstellen und zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens dienen. Eine wichtige Voraussetzung für das weitere Vorgehen ist, dass Gleichung (7.36) im Raum der Verzerrungen und mikropolaren Krümmungen relativ zu der Referenzkonfiguration wie folgt umgeschrieben werden kann

$$f(t) = \tilde{g}(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}_p, \tilde{\mathbf{q}}) \quad , \quad (7.37)$$

wobei $\tilde{\mathbf{q}}$ eine Menge aus inneren Zustandsvariablen \tilde{q}_j , $0 \leq j \leq N$ ist. Diese stehen mit den Verfestigungsvariablen \hat{h}_i auf irgendeiner Art in Verbindung.

Die Gleichung

$$f(t) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c, \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{g}(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (7.38)$$

wird *Fließbedingung* genannt. Für feste Werte von $\hat{\mathbf{h}}$ beschreibt diese eine so genannte *Fließfläche* im Raum der Spannungstensoren $\hat{\mathbf{P}}$ und der Momentenspannungstensoren $\hat{\mathbf{S}}_c$ und für feste Werte von $\tilde{\epsilon}_p$, $\tilde{\mathbf{M}}_p$, $\tilde{\mathbf{q}}$ eine Fließfläche im Raum der mikropolaren Verzerrungstensoren $\tilde{\epsilon}$ und der mikropolaren Krümmungstensoren $\tilde{\mathbf{M}}$. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die betrachteten Fließflächen "glatt" sind.

Diese Arbeit befasst sich ausschließlich mit *geschwindigkeitsunabhängiger Plastizität*. Sei s eine skalare *plastische Bogenlänge*. Es wird postuliert, dass für $s = \text{konstant}$ alle Verfestigungsvariablen relativ zu \hat{R}_t auch konstant bleiben. Ferner ist es sinnvoll, einen so genannten *Belastungsfaktor* $L(t)$

$$L := [\dot{f}]_{s=\text{konstant}} \quad (7.39)$$

zu definieren, der zur folgenden Charakterisierung vom Materialverhalten eingesetzt wird:

$$f < 0 \Leftrightarrow \text{elastischer Bereich} \quad (7.40)$$

$$f = 0 \quad \& \quad L \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{elastische Belastung von } f = 0 \\ \text{neutrale Belastung entlang } f = 0 \\ \text{plastische Belastung} \end{Bmatrix} \quad . \quad (7.41)$$

Plastisches Fließen findet definitionsgemäß nur dann statt, wenn die Bedingungen für eine plastische Belastung zutreffen.

Im Folgenden wird die Aufmerksamkeit auf den Raum der Tensoren $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{\mathbf{M}}$ in der Bezugskonfiguration gerichtet. Offenbar impliziert ein Zyklus im Raum von $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{\mathbf{M}}$ einen Zyklus im Raum weiterer mikropolarer Verzerrungs- und Krümmungsmaße und umgekehrt. Einem Vorschlag von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] folgend werden mikropolare Verzerrungs-Krümmungszyklen als klein (aber nicht notwendigerweise infinitesimal klein) bezeichnet, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Während des zyklischen Deformationsprozesses liegt der anfängliche mikropolare Verzerrungs-Krümmungszustand immer auf oder innerhalb der Fließflächen $\tilde{g} = 0$, die zu diesem Prozess gehören. Mit anderen Worten: Der anfängliche mikropolare Verzerrungs-Krümmungszustand liegt immer im Durchschnitt aller elastischen Bereiche, die von den Fließflächen $\tilde{g} = 0$ während des Prozesses umgeben werden. Dabei bezeichnet $C_s[t_0, t_e]$ einen kleinen mikropolaren Zyklus, der zur Zeit t_0 beginnt und zur Zeit t_e endet. Ein plastisch deformierbares mikropolares Material erfüllt definitionsgemäß das Postulat von Il'iushin für kleine Zyklen, wenn für ein festgehaltenes materielles Teilchen die Spannungs- Momentenspannungsarbeit nie negativ ist ($I(t_0, t_e)$: spezifische Arbeit entlang des Zyklus)

$$\begin{aligned} I(t_0, t_e) &:= \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) dt + \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \mathbf{S}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} dt \\ &= \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \tilde{\Sigma} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} dt + \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \tilde{\mathbf{S}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}} dt \geq 0 \quad \text{für alle } C_s[t_0, t_e] \quad . \end{aligned} \quad (7.42)$$

Im Folgenden wird von den Elastizitätsgesetzen

$$\tilde{\Sigma} = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\epsilon}} \quad , \quad \tilde{\mathbf{S}}_c = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \quad (7.43)$$

Gebrauch gemacht, die sich aus Gleichung (7.32) herleiten lassen.

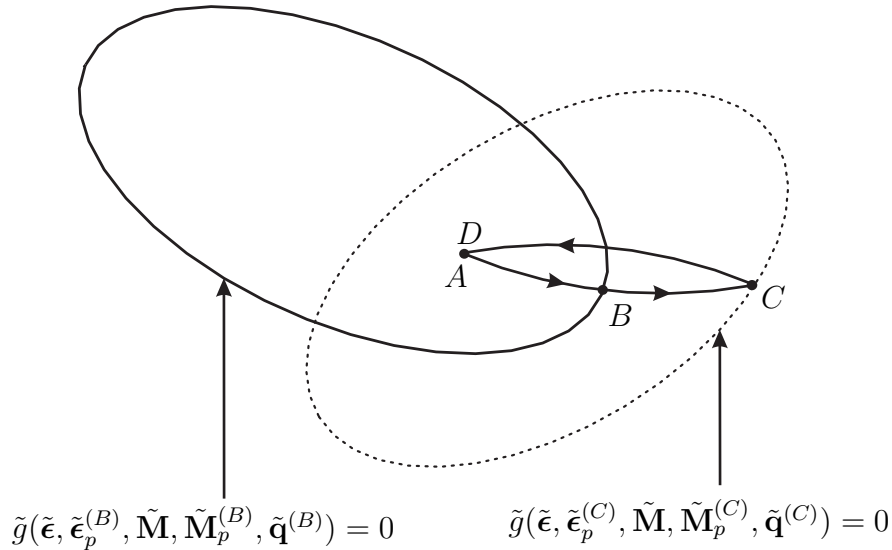


Abbildung 7.1: Ein kleiner Verzerrungs-Krümmungszyklus bei dem nur zwischen B und C plastisches Fließen auftritt.

Wir betrachten den kleinen Zyklus in der Abbildung 7.1, der mit der Zeit t parametrisiert ist und nehmen die Gültigkeit von (7.42) an. Mit $X^{(P)}$ wird der Wert einer Größe X am Punkt P bezeichnet. Die mit den Punkten A, B, C, D verknüpften Zeiten lauten entsprechend $t^{(A)}, t^{(B)}, t^{(C)}, t^{(D)}$ mit $t^{(A)} < t^{(B)} < t^{(C)} < t^{(D)}$. Der Verzerrungs- Krümmungszyklus beginnt und endet bei $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}^{(A)} \equiv \tilde{\epsilon}^{(D)}$, $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}^{(A)} \equiv \tilde{\mathbf{M}}^{(D)}$, während plastisches Fließen nur zwischen B und C stattfindet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
I(t^{(A)}, t^{(D)}) &= \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t^{(A)}}^{t^{(D)}} \{ \tilde{\Sigma} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} + \tilde{\mathbf{S}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}} \} dt \\
&= \int_{t^{(A)}}^{t^{(D)}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}(t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}(t) \right\} dt \\
&= \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p^{(C)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p^{(C)}) - \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p^{(B)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p^{(B)}) \\
&\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) dt \\
&\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) dt \\
&= \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) \right\} dt \\
&\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) dt \\
&\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) dt \\
&= \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \left[\left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \right\} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \right\} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) \right] dt \geq 0 \quad . \tag{7.44}
\end{aligned}$$

Die Benutzung des Theorems von Taylor liefert

$$\lim_{t^{(C)} \rightarrow t^{(B)}} \frac{I(t^{(A)}, t^{(D)})}{t^{(C)} - t^{(B)}} = \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) \right\}_{t=t^{(B)}} + \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{M}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p(t) \right\}_{t=t^{(B)}} \geq 0 \quad (7.45)$$

Da der Punkt B beliebig auf der Fließfläche gewählt werden kann, wird im Folgenden auf seine Erwähnung verzichtet. Damit stellt

$$-\frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}_p)}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p \geq -\frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{M}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{M}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_p \quad (7.46)$$

eine notwendige Bedingung für (7.42) dar. Hierbei bezeichnen $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{\mathbf{M}}$ einen mikropolaren Verzerrungs-Krümmungszustand auf der Fließfläche, während die Variablen $\tilde{\epsilon}_p$, $\tilde{\mathbf{M}}_p$ und $\tilde{\mathbf{q}}$ mit diesem Zustand verbunden sind. Die Größen $\tilde{\epsilon}^{(A)}$ und $\tilde{\mathbf{M}}^{(A)}$ bezeichnen einen mikropolaren Verzerrungs-Krümmungszustand auf oder innerhalb der Fließfläche, zu dem dieselben Werte $\tilde{\epsilon}_p$, $\tilde{\mathbf{M}}_p$, $\tilde{\mathbf{q}}$ wie vorher gehören.

Umgekehrt ist die Ungleichung (7.46) eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (7.42). Dies kann gezeigt werden, indem das Integral über (7.46) entlang eines Verzerrungs-Krümmungszyklus gebildet wird, wie Abbildung 7.1 zeigt. Damit (7.46) während dieses Zyklus gültig bleibt, müssen $\tilde{\epsilon}^{(A)}$ und $\tilde{\mathbf{M}}^{(A)}$ während des Zyklus immer in der Schnittmenge aller elastischen Bereiche (oder höchstens auf ihrem Rand) liegen, was in der Tat impliziert, dass der Zyklus $ABCD$ klein ist. Danach werden dieselben Schritte lediglich in umgekehrter Reihenfolge wie in (7.44) durchgeführt.

Im Hinblick auf (7.25), (7.26) erhält man aus (7.46)

$$\bar{\mathbf{R}}_p^T (1 + \hat{\epsilon}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e, \hat{\mathbf{M}}_e)}{\partial \hat{\epsilon}_e} \mathbf{F}_p^{T-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\epsilon}_p^\square \mathbf{F}_p + \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e, \hat{\mathbf{M}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \bar{\mathbf{R}}_p \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\mathbf{M}}_p^\square \bar{\mathbf{R}}_p \geq \bar{\mathbf{R}}_p^T (1 + (\hat{\epsilon}_e^{(A)})^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e^{(A)}, \hat{\mathbf{M}}_e^{(A)})}{\partial \hat{\epsilon}_e} \mathbf{F}_p^{T-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\epsilon}_p^\square \mathbf{F}_p + \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e^{(A)}, \hat{\mathbf{M}}_e^{(A)})}{\partial \hat{\mathbf{M}}_e} \bar{\mathbf{R}}_p \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\mathbf{M}}_p^\square \bar{\mathbf{R}}_p \quad (7.47)$$

oder auf Grund von (7.32) und (7.34)

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p^\square + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}}_p^\square \geq \hat{\mathbf{P}}^{(A)} \cdot \hat{\epsilon}_p^\square + \hat{\mathbf{S}}_c^{(A)} \cdot \hat{\mathbf{M}}_p^\square \quad (7.48)$$

Es soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Ungleichung (7.48) sowohl zu (7.47) als auch zu (7.42) äquivalent ist.

Mit der Notation

$$\hat{\mathbf{A}}_p := (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \hat{\mathbf{M}}_p), \quad \hat{\hat{\mathbf{A}}}_p := (\hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p, \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} := (\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c) \quad (7.49)$$

läßt sich (7.48) auch folgendermaßen formulieren

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\hat{\mathbf{A}}}_p \geq \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(A)} \cdot \hat{\hat{\mathbf{A}}}_p \quad . \quad (7.50)$$

Zur Interpretation dieser Ungleichung führen wir die *plastische Spannungsleistung*

$$W_{pl} := \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\hat{\mathbf{A}}}_p \quad (7.51)$$

ein. Dann drückt die Gleichung (7.50) das *Prinzip der maximalen mikropolaren plastischen Spannungsleistung* aus. Um dies zu erläutern, bezeichnen wir als zulässigen Spannungszustand $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c)$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ jeden Zustand mit

$$f(t) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c, \hat{\mathbf{h}}) =: \bar{\varphi}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) \leq 0 \quad . \quad (7.52)$$

Für eine rein mechanisch formulierte Theorie drückt die Gleichung (7.50) aus, dass von allen zulässigen Spannungszuständen und für vorgegebene Geschwindigkeiten $\hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p, \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p$ der tatsächliche Spannungszustand die mikropolare plastische Spannungsleistung W_{pl} maximiert.

Wie im Falle der klassischen Plastizität lässt sich zeigen, dass Konvexität der Fließfläche

$\bar{\varphi} = 0$ und die *Normalenregel* für $\hat{\hat{\mathbf{A}}}_p$ hinreichende Bedingungen für (7.50) sind. Also wird die Gleichung (7.50) erfüllt sein, wenn $\hat{\hat{\mathbf{A}}}_p$ in Richtung der äußeren Normalen an der Fließfläche $\bar{\varphi} = 0$ zeigt, die als glatt und konvex angenommen wird (assoziierte Normalenregel)

$$\hat{\hat{\mathbf{A}}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial \bar{\varphi}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \quad , \quad (7.53)$$

oder äquivalent dazu

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \quad , \quad \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c} \quad , \quad (7.54)$$

mit

$$\zeta := \left\| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| := \sqrt{\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c}} \quad . \quad (7.55)$$

Hierbei ist \dot{s} eine positive skalare Größe für die plastische Belastung, die aus der so genannten Konsistenzbedingung $\dot{f} = 0$ bestimmt werden muss. Aus den Gleichungen (7.53) bis (7.55) ist ersichtlich, dass

$$\dot{s} = \sqrt{\hat{\hat{\mathbf{A}}}_p \cdot \hat{\hat{\mathbf{A}}}_p} := \sqrt{\hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p \cdot \hat{\hat{\mathbf{M}}}_p} \quad (7.56)$$

gilt. Offensichtlich ist die Konvexität von $\varphi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) = 0$ bezüglich $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ äquivalent zur Konvexität von $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c, \hat{\mathbf{h}}) = 0$ bezüglich $\hat{\mathbf{P}}$ und $\hat{\mathbf{S}}_c$. Wie im klassischen Fall ist die plastische Inkompressibilität für das makroskopische und damit auch für das mikropolare Kontinuum durch die Bedingung

$$\det \mathbf{F}_p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr} \hat{\mathbf{L}}_p = \text{tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = 0 \quad (7.57)$$

definiert. Im Falle der plastischen Inkompressibilität muss die Fließfunktion eine solche Gestalt besitzen, dass $\partial \hat{\varphi} / \partial \hat{\mathbf{P}}$ stets deviatorisch ist.

7.3 Verfestigung

Wir nehmen die Existenz von *isotroper* und *kinematischer Verfestigung* an. Insbesondere nehmen wir an, dass der plastische Anteil der spezifischen freien Energiefunktion Ψ_p in Anteile infolge isotroper und kinematischer Verfestigung

$$\Psi_p = \Psi_p^{(\text{is})} + \Psi_p^{(\text{kin})} \quad (7.58)$$

separiert werden kann (vgl. DIEGELE ET AL. [25]). Während einer plastischen Belastung wird ein Teil der plastischen Leistung W_{pl} in Wärme dissipiert. Der Rest bleibt im Material als Strukturänderung gespeichert. Solche Strukturänderungen denken wir uns als Prozesse, die in Verbindung zu isotroper und kinematischer Verfestigung stehen und durch $\Psi_p^{(\text{is})}$ und $\Psi_p^{(\text{kin})}$ jeweils erfasst werden.

7.3.1 Kinematische Verfestigung

Es wird die Existenz einer Verzerrung $\hat{\mathbf{Y}}$ und eines Krümmungstensors $\hat{\mathbf{Y}}_c$ angenommen, die Deformationseffekte infolge kinematischer Verfestigung beschreiben. $\hat{\mathbf{Y}}$, $\hat{\mathbf{Y}}_c$ sind Tensoren zweiter Stufe relativ zu \hat{R}_t und können als Teile von $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ und $\hat{\mathbf{M}}_p$ gedacht werden

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad , \quad \hat{\mathbf{M}}_p = \hat{\mathbf{Y}}_c + \hat{\boldsymbol{\beta}}_c \quad . \quad (7.59)$$

Also repräsentiert

$$\hat{\mathbf{y}} := (\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c) \quad (7.60)$$

den Deformationsanteil, der mit der im Material gespeicherten plastischen Arbeit in Verbindung steht, während

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_c) \quad (7.61)$$

den Deformationsanteil darstellt, der mit der Arbeit verbunden ist, die in Wärme dissipiert wird. Die zugeordneten Geschwindigkeiten werden durch

$$\hat{\mathbf{Y}} := \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{L}}_p \quad , \quad \hat{\mathbf{Y}}_c := \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\mathbf{Y}}_c - \hat{\mathbf{Y}}_c \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p^T \quad (7.62)$$

definiert. Damit wird

$$\hat{\epsilon}_p = \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\beta} \quad , \quad \hat{\mathbf{M}}_p = \hat{\mathbf{Y}}_c + \hat{\beta}_c \quad , \quad (7.63)$$

mit

$$\hat{\beta} = \dot{\beta} - \hat{\Omega}_p \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\mathbf{L}}_p \quad , \quad \hat{\beta}_c = \dot{\beta}_c - \hat{\Omega}_p \hat{\beta}_c - \hat{\beta}_c \hat{\Omega}_p^T \quad . \quad (7.64)$$

Im Falle plastischer Inkompressibilität gilt

$$\text{tr } \hat{\mathbf{Y}} = -\text{tr } \hat{\beta} \quad . \quad (7.65)$$

Man könnte die additiven Zerlegungen (7.63) und alle folgenden Ergebnisse auch im Rahmen von multiplikativen Zerlegungen von \mathbf{F}_p und $\bar{\mathbf{R}}_p$ herleiten. Dies ist vollkommen analog zu den Zerlegungen $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ und $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p$ und wird hier nicht näher aufgeführt.

Die im Material gespeicherte Energie infolge kinematischer Verfestigung wird als Funktion von $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ angenommen

$$\Psi_p^{(kin)} = \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c) \quad . \quad (7.66)$$

Es leuchtet sofort ein, dass $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ ein ähnliches Transformationsverhalten bei Überlagerung von Starrkörperrotationen auf die Zwischenkonfiguration wie $\hat{\epsilon}_p$ bzw. $\hat{\mathbf{M}}_p$ aufweisen müssen. Dies wiederum bedeutet, dass $\hat{\Psi}_p^{(kin)}$ eine isotrope Tensorfunktion von $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ ist, und dass $\hat{\Psi}_p^{(kin)}$ eine ähnliche Eigenschaft wie $\hat{\Psi}_e$ in (7.27) besitzt:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \hat{\mathbf{Y}}^T - \hat{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} + \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}_c} \hat{\mathbf{Y}}_c^T - \hat{\mathbf{Y}}_c^T \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}_c} = \text{symm}. \quad (7.67)$$

Die zu $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ thermodynamisch konjugierten Kräfte lauten entsprechend

$$\hat{\mathbf{Z}} := \varrho_R \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \quad , \quad \hat{\xi}_c := \varrho_R \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}_c} \quad . \quad (7.68)$$

Durch Einsetzen in die Dissipationsungleichung (7.35) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(kin)} \\ &= \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\xi}_c \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c \\ &= \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} - \hat{\mathbf{Z}} \cdot (\dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{L}}_p) - \hat{\xi}_c \cdot (\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c + \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}}_c - \hat{\mathbf{Y}}_c \hat{\Omega}_p^T) \end{aligned} \quad (7.69)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\epsilon}_p + \hat{\mathbf{S}}_c \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} - (1 - \hat{\mathbf{Y}}^T) \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\epsilon}_p - \hat{\xi}_c \cdot \hat{\epsilon}_p + \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\beta} + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\beta}_c \\ &\quad - \left\{ \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Y}}^T - \hat{\mathbf{Y}}^T \hat{\mathbf{Z}} + \hat{\xi}_c \hat{\mathbf{Y}}_c^T - \hat{\mathbf{Y}}_c^T \hat{\xi}_c \right\} \cdot \hat{\Omega}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.70)$$

Der letzte Term auf der linken Seite dieser Ungleichung verschwindet vermöge der Symmetrieeigenschaft (7.67). Wir definieren

$$\hat{\xi} := (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{Y}}^T) \hat{\mathbf{Z}} \quad (7.71)$$

und

$$\hat{\chi} := (\hat{\xi}, \hat{\xi}_c) \quad (7.72)$$

und schreiben die Ungleichung (7.70) um:

$$\mathcal{D}_{int} = (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}) \cdot \hat{\epsilon}_p + (\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\xi}_c) \cdot \hat{\mathbf{M}}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} + \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\beta} + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\beta}_c \geq 0 \quad , \quad (7.73)$$

bzw.

$$\mathcal{D}_{int} = (\hat{\sigma} - \hat{\chi}) \cdot \hat{\Lambda}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} + (\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\xi}_c) \cdot (\hat{\beta}, \hat{\beta}_c) \geq 0 \quad . \quad (7.74)$$

In der Gleichung (7.72) sind $\hat{\xi}$, $\hat{\xi}_c$ jeweils Tensoren mit ähnlichen mathematischen Eigenschaften wie der Mandelsche Spannungstensor $\hat{\mathbf{P}}$ und der Momentenspannungstensor $\hat{\mathbf{S}}_c$, während $\hat{\chi}$ einen Translationstensor der kinematischen Verfestigung beschreibt. Die Bedingungen

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} := (\hat{\sigma} - \hat{\chi}) \cdot \hat{\Lambda}_p - \varrho_R \dot{\Psi}_p^{(is)} \geq 0 \quad , \quad (7.75)$$

$$\mathcal{D}_{int}^{(kin)} := (\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\xi}_c) \cdot (\hat{\beta}, \hat{\beta}_c) = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\beta} + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\beta}_c \geq 0 \quad (7.76)$$

sind hinreichend für die Gültigkeit von (7.74) und separieren physikalisch die innere Dissipation \mathcal{D}_{int} in Anteile, die jeweils in Verbindung mit der isotropen und der kinematischen Verfestigung stehen.

Die Ungleichung (7.76) bleibt ständig erfüllt (hinreichende Bedingung), wenn

$$\hat{\beta} = \dot{\hat{\mathcal{L}}}[\hat{\mathbf{Z}}] \quad , \quad \hat{\beta}_c = \dot{\hat{\mathcal{L}}}_c[\hat{\xi}_c] \quad (7.77)$$

wird, wobei $\hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mathcal{L}}_c$ positiv definite isotrope Tensoren vierter Stufe sind (vgl. (1.17)). Unter Berücksichtigung von (7.63) folgt

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\epsilon}_p - \dot{\hat{\mathcal{L}}}[\hat{\mathbf{Z}}] \quad , \quad \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c = \hat{\mathbf{M}}_p - \dot{\hat{\mathcal{L}}}_c[\hat{\xi}_c] \quad . \quad (7.78)$$

Die Gleichungen (7.78) stellen die Evolutionsgleichungen für unsere kinematischen Verfestigungsregel dar. Im Rest der Arbeit betrachten wir $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{L}}_c$ als isotrope Tensoren vierter Stufe mit

$$\hat{\mathcal{L}} = (b_1 + b_2)\mathcal{E} + (b_1 - b_2)\mathcal{I} + b_3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad , \quad (7.79)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_c = (b_{c1} + b_{c2})\mathcal{E} + (b_{c1} - b_{c2})\mathcal{I} + b_{c3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad , \quad (7.80)$$

wobei b_i , b_{ci} , $i = 1, 2, 3$ Materialparameter sind. Insbesondere werden wir auf den Fall $b_3 = b_{c3} = 0$ eingehen:

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\epsilon}_p - \dot{\hat{\mathcal{L}}} \left\{ (b_1 + b_2)\hat{\mathbf{Z}} + (b_1 - b_2)\hat{\mathbf{Z}}^T \right\} \quad , \quad (7.81)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c = \hat{\mathbf{M}}_p - \dot{\hat{\mathcal{L}}}_c \left\{ (b_{c1} + b_{c2})\hat{\xi}_c + (b_{c1} - b_{c2})\hat{\xi}_c^T \right\} \quad . \quad (7.82)$$

7.3.2 Isotrope Verfestigung

Es werden zwei Möglichkeiten zur Modellierung isotroper Verfestigung präsentiert. Die erste Möglichkeit besteht in einer einheitlichen Erfassung des Einflusses von Verzerrung und mikropolarer Krümmung auf die isotrope Verfestigung, während die Zweite getrennt Rücksicht auf Verzerrung und mikropolare Krümmung nimmt. In jedem Fall wird die Existenz einer skalarwertigen Spannung R (isotrope Verfestigung) vorausgesetzt und für die Fließfunktion in (7.52) wird

$$f(t) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{S}}_c, \hat{\mathbf{h}}) = \bar{\varphi}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) = \hat{F}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) \quad , \quad (7.83)$$

$$\hat{F}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) := \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) - k_0 \quad , \quad (7.84)$$

mit

$$\hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) := \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) - R \quad (7.85)$$

angesetzt. Es gilt also insgesamt

$$f(t) = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) - k_0 = \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) - (R + k_0) \quad . \quad (7.86)$$

In diesem Ansatz bedeutet k_0 eine "Anfangsfließgrenze", während R die Änderung dieser Grenze mit dem Deformationsprozeß beschreibt. Die jeweilige aktuelle Fließgrenze ist dann die Summe $k_0 + R$. Hinter diesem Ansatz steckt die Vorstellung, dass nur k mit der Arbeit verknüpft ist, die im Material infolge isotroper Verfestigung als Strukturänderungsarbeit gespeichert wird.

7.3.2.1 Einheitliche Erfassung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung

In dieser Vorgehensweise wird angenommen, dass die im Material gespeicherte Energie infolge isotroper Verfestigung $\Psi_p^{(is)}$ als Funktion einer skalarwertigen Variable r darstellbar ist. $\Psi_p^{(is)}$ ist thermodynamisch konjugiert zu der Spannung R , so dass

$$\Psi_p^{is} = \hat{\Psi}_p^{(is)}(r) \quad , \quad R := \varrho_R \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r} \quad (7.87)$$

geschrieben werden kann. Damit folgt aus (7.75)

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} := (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_p - R \dot{r} \geq 0 \quad , \quad (7.88)$$

oder nach Einsetzen für $\hat{\mathbf{\Lambda}}_p$ aus (7.53)

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} = \frac{\dot{\varsigma}}{\varsigma} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} - R \dot{r} = \frac{\dot{\varsigma}}{\varsigma} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \frac{\partial \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R)}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} - R \dot{r} \geq 0 \quad , \quad (7.89)$$

mit

$$\varsigma = \left\| \frac{\partial \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R)}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \right\| = \sqrt{\frac{\partial \hat{f}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})}} \quad . \quad (7.90)$$

Offensichtlich ist mit $\bar{\varphi}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}})$ als konvexe Funktion in Bezug auf $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, auch $\bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})$ eine konvexe Funktion in Bezug auf $\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}$. Daraus folgt

$$\bar{f}(\mathbf{0}) - \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) - \{\mathbf{0} - (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})\} \cdot \frac{\partial \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} > 0 \quad . \quad (7.91)$$

Mit der Annahme

$$\bar{f}(\mathbf{0}) = 0 \quad (7.92)$$

erhält man aus (7.91)

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \frac{\partial \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} > \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \quad , \quad (7.93)$$

und wegen

$$\frac{\partial \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} = \frac{\partial \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R)}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \quad , \quad (7.94)$$

schließlich

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \frac{\partial \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R)}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} > \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) + R \quad . \quad (7.95)$$

Damit ergibt sich für $\mathcal{D}_{int}^{(is)}$ in (7.89) die Abschätzung

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} > \frac{\dot{s}}{\zeta} \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) + R \left(\frac{\dot{s}}{\zeta} - \dot{r} \right) \quad . \quad (7.96)$$

Da der erste Term auf der rechten Seite dieser Ungleichung für plastisches Fließen positiv ist, sieht man sofort, dass

$$R \left(\frac{\dot{s}}{\zeta} - \dot{r} \right) \geq 0 \quad (7.97)$$

eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (7.88), bzw. (7.89) darstellt. Der Ansatz

$$\frac{\dot{s}}{\zeta} - \dot{r} = \frac{\beta^{(is)}}{\gamma^{(is)}} \frac{\dot{s}}{\zeta} R \quad (7.98)$$

erfüllt die Ungleichung (7.97) und liefert die Evolutionsgleichung

$$\dot{r} = \left(1 - \frac{\beta^{(is)}}{\gamma^{(is)}} R \right) \frac{\dot{s}}{\zeta} \quad , \quad (7.99)$$

vorausgesetzt, dass für die Materialparameter $\frac{\beta^{(is)}}{\gamma^{(is)}}$

$$\beta^{(is)}, \gamma^{(is)}, \frac{\beta^{(is)}}{\gamma^{(is)}} \geq 0 \quad (7.100)$$

gilt. Wir wählen an dieser Stelle einen quadratischen Ansatz für den plastischen Anteil der spezifischen freien Energiefunktion infolge isotroper Verfestigung

$$\Psi_p^{(is)} = \frac{\gamma^{(is)}}{2\varrho_R} r^2 \quad , \quad (7.101)$$

so dass

$$R = \gamma^{(is)} r \quad (7.102)$$

und aus (7.99)

$$\dot{r} = (1 - \beta^{(is)} r) \frac{\dot{s}}{\zeta} \quad , \quad (7.103)$$

oder

$$\dot{R} = (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} R) \frac{\dot{s}}{\zeta} \quad \text{bzw.} \quad \dot{k} = [\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} (k - k_0)] \frac{\dot{s}}{\zeta} \quad (7.104)$$

wird. Diese Resultate sind völlig ähnlich zu denjenigen in klassischer Plastizität, die in mehreren Arbeiten von Chaboche (siehe zB. CHABOCHE [16], [17]) vorgeschlagen wurden.

Die isotrope Verfestigungsregel (7.103) zusammen mit (7.86) und (7.102) erfassen gleichermassen Effekte infolge Deformation und infolge mikropolarer Krümmung. In der Tat ist \dot{s} in Gleichung (7.103) die einzige Stelle, an der diese Deformationsbeiträge in die isotrope Verfestigung einfließen. Aus (7.56) ist ersichtlich, dass die positive skalare Größe \dot{s} die Größen $\hat{\epsilon}_p^\square$ und $\hat{\mathbf{M}}_p^\square$ gleichermaßen berücksichtigt.

7.3.2.2 Getrennte Berücksichtigung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung

Eine separate Erfassung der Effekte infolge Deformation und infolge des Gradienten der Deformation ist durch die Annahme

$$\Psi_p^{(is)} = \hat{\Psi}_p^{(is)}(r_1, r_2) = \frac{1}{2\varrho_R} (\gamma_1^{(is)} r_1^2 + \gamma_2^{(is)} r_2^2) \quad (7.105)$$

möglich. Dabei sind r_1, r_2 skalarwertige Dehnungen, die jeweils zuständig für den Einfluss der Deformation und der mikropolaren Krümmung auf die isotrope Verfestigung sind. Die isotrope Verfestigung R wird jetzt durch die Summe

$$R := R_1 + R_2 \quad (7.106)$$

dargestellt, wobei R_1 und R_2 die thermodynamisch konjugierten Kräfte

$$R_1 := \varrho_R \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r_1} = \gamma_1^{(is)} r_1 \quad , \quad R_2 := \varrho_R \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r_2} = \gamma_2^{(is)} r_2 \quad (7.107)$$

bedeuten. Damit folgt für die Dissipationsungleichung (7.75)

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}_p - R_1 \dot{r}_1 - R_2 \dot{r}_2 \geq 0 \quad . \quad (7.108)$$

Völlig analog zum letzten Abschnitt zeigt man, dass $\mathcal{D}_{int}^{(is)}$ durch

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} > \frac{\dot{s}}{\zeta} \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) + R \frac{\dot{s}}{\zeta} - R_1 \dot{r}_1 - R_2 \dot{r}_2 \quad (7.109)$$

abgeschätzt werden kann, so dass

$$R \frac{\dot{s}}{\zeta} - R_1 \dot{r}_1 - R_2 \dot{r}_2 = R_1 \frac{\dot{s}}{\zeta} + R_2 \frac{\dot{s}}{\zeta} - R_1 \dot{r}_1 - R_2 \dot{r}_2 \geq 0 \quad (7.110)$$

eine hinreichende Bedingung für (7.89) ist (ζ ist wie in (7.90) definiert).

Auf der anderen Seite gilt die Abschätzung

$$\dot{s} \geq \dot{s}_1 \quad , \quad \dot{s} \geq \dot{s}_2 \quad , \quad (7.111)$$

mit

$$\dot{s} = \sqrt{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \hat{\mathbf{M}}_p \cdot \hat{\mathbf{M}}_p} = \sqrt{\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2} \quad , \quad (7.112)$$

$$\dot{s}_1 := \sqrt{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \quad , \quad \dot{s}_2 := \sqrt{\hat{\mathbf{M}}_p \cdot \hat{\mathbf{M}}_p} \quad . \quad (7.113)$$

Dementsprechend wird die Gleichung (7.110) erfüllt sein, wenn

$$R_1 \frac{\dot{s}_1}{\zeta} + R_2 \frac{\dot{s}_2}{\zeta} - R_1 \dot{r}_1 - R_2 \dot{r}_2 = R_1 \left(\frac{\dot{s}_1}{\zeta} - \dot{r}_1 \right) + R_2 \left(\frac{\dot{s}_2}{\zeta} - \dot{r}_2 \right) \geq 0 \quad , \quad (7.114)$$

oder wenn

$$R_1 \left(\frac{\dot{s}_1}{\zeta} - \dot{r}_1 \right) \geq 0 \quad \text{und} \quad R_2 \left(\frac{\dot{s}_2}{\zeta} - \dot{r}_2 \right) \geq 0 \quad (7.115)$$

gilt. Hinreichende Bedingungen hierfür sind

$$\frac{\dot{s}_1}{\zeta} - \dot{r}_1 = \frac{\beta_1^{(is)} \dot{s}_1}{\gamma_1^{(is)} \zeta} R_1 \quad , \quad \frac{\dot{s}_2}{\zeta} - \dot{r}_2 = \frac{\beta_2^{(is)} \dot{s}_2}{\gamma_2^{(is)} \zeta} R_2 \quad , \quad (7.116)$$

oder

$$\dot{r}_1 = \left(1 - \frac{\beta_1^{(is)}}{\gamma_1^{(is)}} R_1 \right) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \quad , \quad \dot{r}_2 = \left(1 - \frac{\beta_2^{(is)}}{\gamma_2^{(is)}} R_2 \right) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \quad , \quad (7.117)$$

oder

$$\dot{r}_1 = (1 - \beta_1^{(is)} r_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \quad , \quad \dot{r}_2 = (1 - \beta_2^{(is)} r_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \quad . \quad (7.118)$$

Dabei sind die Materialparameter $\beta_i^{(is)}, \gamma_i^{(is)}$, $i = 1, 2$ den Bedingungen $\beta_i^{(is)}, \gamma_i^{(is)}, \frac{\beta_i^{(is)}}{\gamma_i^{(is)}} \geq 0$ unterworfen. Natürlich können die Evolutionsgleichungen (7.118) mittels der Spannungsvariablen R_i folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\dot{R}_1 = (\gamma_1^{(is)} - \beta_1^{(is)} R_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \quad , \quad \dot{R}_2 = (\gamma_2^{(is)} - \beta_2^{(is)} R_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \quad . \quad (7.119)$$

8 Das Gesamtmodell

8.1 Lineare Stoffgesetze - von Mises Fließfunktion

Wir konkretisieren jetzt die Elastizitätsgesetze (7.32) in der Hinsicht, dass $\hat{\Sigma}$ und \hat{S}_c durch lineare Abhängigkeiten von $\hat{\epsilon}_e$ und \hat{M}_e gegeben werden. Dazu wird in Anlehnung an ERINGEN [32] der Ansatz

$$\hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e, \hat{M}_e) = \frac{1}{2\rho_R} \left\{ \lambda(\text{tr}\hat{\epsilon}_e)^2 + (\mu + \alpha)\hat{\epsilon}_e \cdot \hat{\epsilon}_e + (\mu - \alpha)\hat{\epsilon}_e \cdot \hat{\epsilon}_e^T + \beta(\text{tr}\hat{M}_e)^2 + (\gamma + \delta)\hat{M}_e \cdot \hat{M}_e + (\gamma - \delta)\hat{M}_e \cdot \hat{M}_e^T \right\} \quad (8.1)$$

gewählt, wobei $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ Elastizitätskonstanten darstellen. Durch Einsetzen von (8.1) in (7.32) folgen die entsprechenden Ausdrücke für die Spannungen und Momentenspannungen

$$\hat{\Sigma} = \lambda(\text{tr}\hat{\epsilon}_e)\mathbf{1} + (\mu + \alpha)\hat{\epsilon}_e + (\mu - \alpha)\hat{\epsilon}_e^T, \quad (8.2)$$

$$\hat{S}_c = \beta(\text{tr}\hat{M}_e)\mathbf{1} + (\gamma + \delta)\hat{M}_e + (\gamma - \delta)\hat{M}_e^T. \quad (8.3)$$

Für die Fließfunktion in (7.52) bzw. in den Gleichungen (7.83) bis (7.86) wird in Anlehnung an DE BORST [10] der verallgemeinerte von Mises-Ansatz

$$\begin{aligned} f &= \hat{f}(\hat{\sigma} - \hat{\chi}, R) - k_0 \\ &= \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\xi}^T)^D \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\xi}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\xi}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\xi}_c^T)^D \right)^{\frac{1}{2}} - R - k_0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

gewählt, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ Materialparameter darstellen. Damit erhält man einerseits

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{1}{f + k} \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\xi}^T)^D \right), \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c} = \frac{1}{f + k} \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\xi}_c^T)^D \right) \quad (8.6)$$

und andererseits

$$\zeta = \frac{1}{f+k} \left\{ \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) \cdot \right. \\ \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) \\ + \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) \cdot \\ \left. \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (8.7)$$

Damit ergibt sich die Fließregel (7.54) zu

$$\overset{\square}{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_p = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{(f+k)} \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) , \quad (8.8)$$

$$\overset{\square}{\dot{\mathbf{M}}}_p = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{(f+k)} \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) . \quad (8.9)$$

Schließlich wird noch für den plastischen Anteil der spezifischen freien Energiefunktion infolge kinematischer Verfestigung $\Psi_p^{(kin)}$

$$\Psi_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c) = \frac{1}{2\varrho_R} \left\{ c_1(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}})^2 + (c_2 + c_3)\hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} + (c_2 - c_3)\hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^T \right. \\ \left. + c_4(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}}_c)^2 + (c_5 + c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c \cdot \hat{\mathbf{Y}}_c + (c_5 - c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c \cdot \hat{\mathbf{Y}}_c^T \right\} \quad (8.10)$$

gesetzt, wobei c_1, \dots, c_6 Materialparameter sind. Für die spannungsartigen Größen $\hat{\mathbf{Z}}$ und $\hat{\boldsymbol{\xi}}_c$ ergibt sich dann

$$\hat{\mathbf{Z}} = c_1(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}})\mathbf{1} + (c_2 + c_3)\hat{\mathbf{Y}} + (c_2 - c_3)\hat{\mathbf{Y}}^T , \quad (8.11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_c = c_4(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}}_c)\mathbf{1} + (c_5 + c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c + (c_5 - c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c^T . \quad (8.12)$$

8.2 Zusammenfassung des Modells relativ zu \hat{R}_t

Alle Gleichungen des mikropolaren Plastizitätsmodells lassen sich wie folgt relativ zur Zwischenkonfiguration \hat{R}_t zusammenfassen.

Kinematik

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p , \quad \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p , \quad (8.13)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}} , \\ \mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{U}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \bar{\mathbf{R}}_e , \\ \mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p = \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{U}}_p = \bar{\mathbf{V}}_p \bar{\mathbf{R}}_p , \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}_p &= \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad , \quad \hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T) \quad , \\ \hat{\mathbf{W}}_p &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{L}}_p^T) \quad , \quad \hat{\mathbf{\Omega}}_p = \dot{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad ,\end{aligned}\tag{8.15}$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e = \bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \quad ,\tag{8.16}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_e + \hat{\mathbf{M}}_p = \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{R}}_e \quad , \quad \mathbf{M} = \left\{ \text{axl} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}^T \right) \right\} \otimes \mathbf{e}^i \quad .\tag{8.17}$$

Spannungen

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{F}_e^T \quad , \\ \hat{\mathbf{P}} &= (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \quad ,\end{aligned}\tag{8.18}$$

$$\mathbf{S}_c = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{S}}_c \bar{\mathbf{R}}_e^T \quad ,\tag{8.19}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{\mathbf{S}}_c) \quad .\tag{8.20}$$

Elastizitätsgesetze

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \lambda(\text{tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e) \mathbf{1} + (\mu + \alpha) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e + (\mu - \alpha) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T \quad ,\tag{8.21}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_c = \beta(\text{tr} \hat{\mathbf{M}}_e) \mathbf{1} + (\gamma + \delta) \hat{\mathbf{M}}_e + (\gamma - \delta) \hat{\mathbf{M}}_e^T \quad .\tag{8.22}$$

Fließfunktion

$$\begin{aligned}f(t) &= \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, R) - k_0 \\ &= \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_3 + \alpha_4) (\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\hat{\mathbf{S}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{S}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right)^{\frac{1}{2}} - k,\end{aligned}\tag{8.23}$$

$$k = k_0 + R \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\chi}} = (\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_c) \quad .\tag{8.24}$$

Fließregeln

$$\stackrel{\square}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p = \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p - \hat{\mathbf{\Omega}}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \hat{\mathbf{L}}_p \equiv \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{\Omega}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \quad ,\tag{8.25}$$

$$\stackrel{\square}{\hat{\mathbf{M}}}_p = \dot{\hat{\mathbf{M}}}_p - \hat{\mathbf{\Omega}}_p \hat{\mathbf{M}}_p - \hat{\mathbf{M}}_p \hat{\mathbf{\Omega}}_p^T = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c} \quad ,\tag{8.26}$$

$$\dot{s} = \sqrt{\hat{\epsilon}_p^\square \cdot \hat{\epsilon}_p^\square + \hat{\mathbf{M}}_p^\square \cdot \hat{\mathbf{M}}_p^\square} = \sqrt{\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2} \quad , \quad (8.27)$$

$$\dot{s}_1 := \sqrt{\hat{\epsilon}_p^\square \cdot \hat{\epsilon}_p^\square} \quad , \quad \dot{s}_2 := \sqrt{\hat{\mathbf{M}}_p^\square \cdot \hat{\mathbf{M}}_p^\square} \quad , \quad (8.28)$$

$$\zeta := \sqrt{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{S}}_c}} \quad . \quad (8.29)$$

Bedingung für plastisches Fließen

$$L(t) := [\dot{f}(t)]_{s=\text{const.}} \quad , \quad (8.30)$$

$$\dot{s} > 0 \quad \text{für} \quad \dot{f} = 0 \quad \& \quad L > 0 \quad , \quad (8.31)$$

$$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst} \quad , \quad (8.32)$$

$$\dot{s} : \quad \text{Bestimmung aus} \quad \dot{f} = 0 \quad . \quad (8.33)$$

Kinematische Verfestigung

$$\hat{\xi} := (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{Y}}^T) \hat{\mathbf{Z}} \quad , \quad (8.34)$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = c_1(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}}) \mathbf{1} + (c_2 + c_3) \hat{\mathbf{Y}} + (c_2 - c_3) \hat{\mathbf{Y}}^T \quad , \quad (8.35)$$

$$\hat{\xi}_c = c_4(\text{tr} \hat{\mathbf{Y}}_c) \mathbf{1} + (c_5 + c_6) \hat{\mathbf{Y}}_c + (c_5 - c_6) \hat{\mathbf{Y}}_c^T \quad , \quad (8.36)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}^\square = \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{L}}_p = \hat{\epsilon}_p^\square - \dot{s} \left\{ (b_1 + b_2) \hat{\mathbf{Z}} + (b_1 - b_2) \hat{\mathbf{Z}}^T \right\} \quad , \quad (8.37)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_c^\square = \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}}_c + \hat{\mathbf{Y}}_c \hat{\Omega}_p = \hat{\mathbf{M}}_p^\square - \dot{s} \left\{ (b_{c1} + b_{c2}) \hat{\xi}_c + (b_{c1} - b_{c2}) \hat{\xi}_c^T \right\} \quad . \quad (8.38)$$

Isotrope Verfestigung mit einer Deformationsvariable r

$$R = \gamma^{(is)} r \quad , \quad \dot{r} = (1 - \beta^{(is)} r) \frac{\dot{s}}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R} = (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} R) \frac{\dot{s}}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{k} = (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} (k - k_0)) \frac{\dot{s}}{\zeta} \quad . \quad (8.39)$$

Isotrope Verfestigung mit zwei Deformationsvariablen r_1, r_2

$$R = R_1 + R_2 \quad , \quad R_1 = \gamma_1^{(is)} r_1 \quad , \quad R_2 = \gamma_2^{(is)} r_2 \quad , \quad (8.40)$$

$$\dot{r}_1 = (1 - \beta_1^{(is)} r_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R}_1 = (\gamma_1^{(is)} - \beta_1^{(is)} R_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \quad , \quad (8.41)$$

$$\dot{r}_2 = (1 - \beta_2^{(is)} r_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R}_2 = (\gamma_2^{(is)} - \beta_2^{(is)} R_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \quad . \quad (8.42)$$

8.3 Kleine elastische Verzerrungen - Zusammenfassung des Models relativ zu R_t

In der Metallplastizität ist der Fall kleiner elastischer Verzerrungen, dem wir uns im Rest der Arbeit widmen wollen, von besonderer Bedeutung. Dieser ist durch $\|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\|, \|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\| \ll 1$ definiert. Für diesen Grenzfall gelten asymptotische Approximationen der Form

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \mathbf{V}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (8.43)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \bar{\mathbf{V}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (8.44)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \mathbf{R}_e = \bar{\mathbf{R}}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (8.45)$$

wobei

$$\epsilon_e := \sup_{\mathbf{x} \in R_t, t \geq 0} \{ \|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\|, \|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\| \} \quad (8.46)$$

gilt. Das mikropolare Plastizitätsmodel läßt sich für kleine elastische Verzerrungen folgendermaßen relativ zur Momentankonfiguration R_t zusammenfassen:

Kinematik

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{H} + \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad , \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad , \quad (8.47)$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad , \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T \quad , \quad (8.48)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad , \quad (8.49)$$

$$\mathbf{M} = \left\{ \text{axl} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}^T \right) \right\} \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_p \quad . \quad (8.50)$$

Spannungen

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c \quad , \quad \mathbf{S}_c = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}_c \quad . \quad (8.51)$$

Elastizitätsgesetze

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}_e)\mathbf{1} + (\mu + \alpha)\boldsymbol{\epsilon}_e + (\mu - \alpha)\boldsymbol{\epsilon}_e^T, \quad (8.52)$$

$$\mathbf{S}_c = \beta(\text{tr}\mathbf{M}_e)\mathbf{1} + (\gamma + \delta)\mathbf{M}_e + (\gamma - \delta)\mathbf{M}_e^T. \quad (8.53)$$

Fließfunktion

$$\begin{aligned} f(t) = & ((\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D \\ & + (\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D \cdot (\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D \cdot (\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D)^{\frac{1}{2}} - k, \end{aligned} \quad (8.54)$$

$$k = k_0 + R. \quad (8.55)$$

Fließregeln

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{\epsilon}_p\mathbf{L} = \frac{\dot{s}}{\zeta(f+k)} \{(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D\}, \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} \overset{\square}{\mathbf{M}}_p &= \dot{\mathbf{M}}_p - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_p\boldsymbol{\Omega} \\ &= \frac{\dot{s}}{\zeta(f+k)} \{(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D\}, \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \overset{\square}{\mathbf{M}}_p \cdot \overset{\square}{\mathbf{M}}_p} = \sqrt{\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2}, \quad (8.58)$$

$$\dot{s}_1 := \sqrt{\overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p}, \quad \dot{s}_2 := \sqrt{\overset{\square}{\mathbf{M}}_p \cdot \overset{\square}{\mathbf{M}}_p}, \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{1}{f+k} \{[(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D] \cdot \\ & [(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D] \\ & + [(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D] \cdot \\ & [(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D]\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Bedingung für plastisches Fließen

$$L(t) := [\dot{f}(t)]_{s=\text{const.}}, \quad (8.61)$$

$$\dot{s} > 0 \quad \text{für} \quad f = 0 \quad \& \quad L > 0, \quad (8.62)$$

$$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}, \quad (8.63)$$

$$\dot{s}: \quad \text{Bestimmung aus} \quad \dot{f} = 0. \quad (8.64)$$

Kinematische Verfestigung

$$\boldsymbol{\xi} := (1 - \mathbf{Y}^T) \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\xi}} \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad \mathbf{Z} := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad \mathbf{Y} := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (8.65)$$

$$\boldsymbol{\xi}_c := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad \mathbf{Y}_c := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}}_c \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (8.66)$$

$$\mathbf{Z} = c_1(\text{tr} \mathbf{Y}) \mathbf{1} + (c_2 + c_3) \mathbf{Y} + (c_2 - c_3) \mathbf{Y}^T, \quad (8.67)$$

$$\mathbf{Z}_c = c_4(\text{tr} \mathbf{Y}_c) \mathbf{1} + (c_5 + c_6) \mathbf{Y}_c + (c_5 - c_6) \hat{\mathbf{Y}}^T, \quad (8.68)$$

$$\overset{\square}{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{L} = \overset{\square}{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \dot{s} \{ (b_1 + b_2) \mathbf{Z} + (b_1 - b_2) \mathbf{Z}^T \}, \quad (8.69)$$

$$\overset{\square}{\mathbf{Y}}_c = \dot{\mathbf{Y}}_c - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c \boldsymbol{\Omega} = \overset{\square}{\mathbf{M}}_p - \dot{s} \{ (b_{c1} + b_{c2}) \boldsymbol{\xi}_c + (b_{c1} - b_{c2}) \boldsymbol{\xi}_c^T \}. \quad (8.70)$$

Isotrope Verfestigung mit einer Deformationsvariable r

$$R = \gamma^{(is)} r, \quad \dot{r} = (1 - \beta^{(is)} r) \frac{\dot{s}}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R} = (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} R) \frac{\dot{s}}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{k} = (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} (k - k_0)) \frac{\dot{s}}{\zeta}. \quad (8.71)$$

Isotrope Verfestigung mit zwei Deformationsvariablen r_1, r_2

$$R = R_1 + R_2, \quad R_1 = \gamma_1^{(is)} r_1, \quad R_2 = \gamma_2^{(is)} r_2, \quad (8.72)$$

$$\dot{r}_1 = (1 - \beta_1^{(is)} r_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R}_1 = (\gamma_1^{(is)} - \beta_1^{(is)} R_1) \frac{\dot{s}_1}{\zeta}, \quad (8.73)$$

$$\dot{r}_2 = (1 - \beta_2^{(is)} r_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta} \Leftrightarrow \dot{R}_2 = (\gamma_2^{(is)} - \beta_2^{(is)} R_2) \frac{\dot{s}_2}{\zeta}. \quad (8.74)$$

Es sei angemerkt, dass die Transformationen relativ zur Momentankonfiguration R_t und daher auch Definitionen wie z.B. (8.65), (8.66) rein formaler Natur sind und keinerlei physikalische Bedeutung haben. Das konstitutive Modell, also die Physik, sind bereits relativ zur Zwischenkonfiguration \hat{R}_t formuliert.

9 Finite-Elemente-Formulierung des mikropolaren Kontinuums

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die erweiterte Kinematik und das dazugehörige Materialmodell zur Beschreibung elastisch-inelastischen mikropolaren Materialverhaltens bei großen Deformationen hergeleitet. Um beliebige mechanische Strukturen als Anfangsrandwertprobleme betrachten zu können, muss das entwickelte konstitutive Modell mittels eines numerischen Verfahrens umgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Grundlegende Lehrbücher zur Thematik der finiten Elemente sind beispielsweise BATHE [4], HUGHES [49], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], SCHWARZ [78], REDDY [75], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5] und WRIGGERS [95].

In diesem Kapitel werden für die Finite-Elemente-Methode aus der starken Form des quasistatischen Randwertproblems die schwache Formulierung des Gleichgewichts für mikropolares Materialverhalten und die konsistente Linearisierung der schwachen Form hergeleitet. Die Herleitung geht im Prinzip zurück auf STEINMANN [81]. Auf der Basis dieser Grundgleichungen erfolgt die Beschreibung der Methode der finiten Elemente mittels Einführung einer Diskretisierung und einer isoparametrischen Interpolation. Bei der Integration der Gleichungen findet das Operator-Split-Verfahren Anwendung. Aus den Gleichungen auf Elementebene werden die globalen Gleichungen assembliert und in einer globalen Gleichgewichtssiteration gelöst. Die Finite-Elemente-Methode kann auf beliebige Elementformulierungen angewandt werden. Hier wird ein eigenständig entwickeltes dreidimensionales 8-Knoten-Volumenelement mit Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden betrachtet. Dieses Element wird über die Benutzerschnittstelle UEL in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert (siehe dazu die ABAQUS Manuals [1] und [2]).

9.1 Darstellung des quasistatischen Randwertproblems

Die schwache Formulierung des Gleichgewichts stellt die Grundlage der räumlichen Diskretisierung dar und ist der Ausgangspunkt für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode. Eine Darstellung der Vorgehensweise bei klassischen Kontinua findet sich in BATHE [4], HUGHES [49], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], SCHWARZ [78], REDDY [75], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5], WRIGGERS [95] und BONET & WOOD [8].

9.1.1 Starke Formulierung des quasistatischen Randwertproblems

Zur vollständigen Formulierung des quasistatischen Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten werden neben den kinematischen Größen, den Bilanzgleichungen und den konstitutiven Beziehungen Bedingungen für die Oberfläche $\partial\mathcal{R}_t$ des betrachteten materiellen Körpers benötigt. Auf den Teilflächen $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}}$ und $\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}}$ werden wesentliche oder Dirichlet-Randbedingungen für die Verschiebungen (sog. Verschiebungsrandbedingungen)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \quad (9.1)$$

sowie für die Rotationen (sog. Rotationsrandbedingungen)

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (9.2)$$

vorgegeben. Dabei stellt $\boldsymbol{\vartheta}$ den axialen Vektor zum antisymmetrischen Tensor $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\vartheta}}$ dar, der dem Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ des Mikrokontinuums zugeordnet wird (vgl. Gleichungen (1.25) und (1.26))

$$\bar{\mathbf{R}} = \exp(\mathbf{W}_{\boldsymbol{\vartheta}}) = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta})) \quad . \quad (9.3)$$

Auf den Teilrändern $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}$ und $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}$ gelten natürliche oder Neumann-Randbedingungen für die Kraftspannungen (sog. Spannungsrandbedingungen)

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} \quad (9.4)$$

und für die Momentenspannungen (sog. Momentenspannungsrandbedingungen)

$$\mathbf{T}_c\mathbf{n} = \mathbf{t}_c^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c} \quad . \quad (9.5)$$

Dabei stellt \mathbf{n} die nach außen gerichtete Einheitsnormale der Oberfläche $\partial\mathcal{R}_t$ dar. Der kinematische Rand $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}}$ sowie $\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}}$ und der statische Rand $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}$ sowie $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}$ müssen zusätzlich die Beziehungen

$$\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \cup \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \cap \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} = \emptyset \quad , \quad (9.6)$$

$$\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}} \cup \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}} \cap \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c} = \emptyset \quad (9.7)$$

erfüllen. Die Gleichgewichtsbedingungen für die im Weiteren betrachteten quasistatischen Deformationsprozesse lauten

$$\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad (9.8)$$

$$\text{div}\mathbf{T}_c + \mathbf{t}_T + \mathbf{b}_c = \mathbf{0} \quad . \quad (9.9)$$

Diese bilden zusammen mit den Randbedingungen, den kinematischen Größen und den konstitutiven Gleichungen das zu lösende Randwertproblem in seiner starken Form. Somit können für gegebenes \mathbf{b} und \mathbf{b}_c die gesuchten Größen \mathbf{u} und $\boldsymbol{\vartheta}$ berechnet werden.

9.1.2 Schwache Formulierung des quasistatischen Randwertproblems

In Anlehnung an das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bei nicht polaren Kontinua (siehe hierzu HUGHES [49], SCHWARZ [78] oder REDDY [75]) wird ein verallgemeinertes Prinzip der virtuellen Verschiebungen und virtuellen Rotationen für mikropolare Medien vorgestellt (siehe STEINMANN [81], [85], ERINGEN [32] und ELSÄSSER [29]). Die Gleichgewichtsbedingungen werden mit sogenannten Testfunktionen (auch Variationen genannt) multipliziert. Die lokale Impulsbilanz wird skalar mit einer vektorwertigen Funktion $\delta \mathbf{u}$ (virtuelle Verschiebung) multipliziert,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (9.10)$$

die lokale Drehimpulsbilanz skalar mit einer vektorwertigen Funktion $\delta \mathbf{v}$ (virtuelle Rotation)

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (9.11)$$

Die Bedeutung von $\delta \mathbf{v}$ als virtuelle Rotation kann wie folgt verstanden werden. Aus Gleichung (9.3) ist ersichtlich, dass der mikropolare Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ als Funktion des axialen Vektors $\boldsymbol{\vartheta}$ dargestellt werden kann, d. h. $\bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}} := \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\vartheta})$. Wird an die Rotation $\bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}}$ eine weitere Rotation \mathbf{Q} angeschlossen, dann gilt für die resultierende Gesamtrotaion $\bar{\mathbf{R}}$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}} \quad . \quad (9.12)$$

Es wird angenommen, dass das Feld \mathbf{Q} eine Funktion des antisymmetrischen Tensors \mathbf{V} und eines skalaren Parameters ξ ist, so dass

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\xi \mathbf{V}) = \exp(\xi \mathbf{V}) \quad . \quad (9.13)$$

Damit ist die virtuelle Rotation $\delta \bar{\mathbf{R}}$ definiert durch

$$\delta \bar{\mathbf{R}} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{Q}(\xi \mathbf{V}) \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}} \right|_{\xi=0} \quad \xi \quad . \quad (9.14)$$

Mit Hilfe der Euler-Rodrigues-Formel (1.26) folgt aus Gleichung (9.14), dass

$$\delta \bar{\mathbf{R}} = (\xi \mathbf{V}) \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}} = \delta \mathbf{V} \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (9.15)$$

mit

$$\delta \mathbf{V} := \xi \mathbf{V} \quad (9.16)$$

und

$$\delta \mathbf{v} = \operatorname{axl}(\delta \mathbf{V}) \quad . \quad (9.17)$$

Die anschließende Integration über das Volumen des betrachteten materiellen Körpers liefert

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv = 0 \quad , \quad (9.18)$$

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{v} dv = 0 \quad . \quad (9.19)$$

Die partielle Integration des ersten Terms von (9.18) mit nachfolgender Anwendung des Divergenztheorems und der Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv &= \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} n da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \quad .
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Für den ersten Term von (9.19) ergibt sich analog

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv = \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv \quad . \tag{9.21}$$

Insgesamt gilt

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}} := \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}} \mathbf{t}^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv = 0 \tag{9.22}$$

und

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} := \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{V} dv = 0 \tag{9.23}$$

mit

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{V} = \operatorname{Spn}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) \tag{9.24}$$

und der Nebenrechnung

$$\mathbf{t}_T \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} \hat{=} (t_T)_k \delta v_k = e_{ijk} T_{ji} \delta v_k = T_{ji} e_{ijk} \delta v_k = T_{ji} \delta V_{ji} \hat{=} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{V} \quad . \tag{9.25}$$

Hierbei stellen $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}$ und $\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}$ jeweils ein Funktional von \mathbf{u} , $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}$ dar

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}} := \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad , \tag{9.26}$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} := \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad . \tag{9.27}$$

Die gesuchten Lösungsfunktionen \mathbf{u} für die Verschiebungen und $\boldsymbol{\vartheta}$ für die Rotationen entstammen den Funktionenräumen

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \} \quad , \tag{9.28}$$

$$\mathcal{T} = \{ \boldsymbol{\vartheta} \mid \boldsymbol{\vartheta} \in \mathcal{H}^1, \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\vartheta}} \} \quad , \tag{9.29}$$

während die Mengen aller möglichen unabhängigen Variationen bzw. Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$ durch

$$\mathcal{V} = \{\delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^u\} \quad , \quad (9.30)$$

$$\mathcal{W} = \{\delta \mathbf{v} \mid \delta \mathbf{v} \in \mathcal{H}^1, \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^\vartheta\} \quad (9.31)$$

gegeben sind. Hierbei ist \mathcal{H}^1 die Menge aller Funktionen, deren erste partielle Ableitung über \mathcal{R}_t quadrat-integrabel ist. Von den Lösungsfunktionen wird also lediglich die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen gefordert. Für die Testfunktionen gelten die entsprechenden homogenen Randbedingungen. Die Gleichungen (9.22) und (9.23) entsprechen zusammen mit den kinematischen und den konstitutiven Beziehungen der schwachen Form des quasistatischen Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten.

Wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung kann auch bei mikropolarem Materialverhalten gezeigt werden, dass die Lösung der schwachen Form des quasistatischen Randwertproblems äquivalent zu der Lösung der starken Formulierung des quasistatischen Randwertproblems ist (s. dazu ELSÄSSER [29]).

9.1.3 Räumliche Diskretisierung des quasistatischen Randwertproblems

Bei der Methode der finiten Elemente werden verschiedene Approximationen vorgenommen. Zum einen wird das zu untersuchende Gebiet mit finiten Elementen diskretisiert, zum anderen werden die Feldgrößen (wie Verschiebungen, Rotationen usw.) approximiert. Schließlich werden auch die auftretenden Integrale nicht mehr exakt bestimmt, sondern mittels numerischer Integration berechnet. Es ergibt sich eine Näherungslösung des betrachteten mechanischen Problems.

Die Bestimmung einer Näherungslösung kann mit Hilfe verschiedener Ansätze geschehen (siehe zum Beispiel HUGHES [49], SCHWARZ [78] oder REDDY [75]). Die Äquivalenz der schwachen Formulierung für mikropolare Kontinua zur Methode der gewichteten Residuen erfolgt durch die Einschränkung der Funktionenräume \mathcal{S} , \mathcal{T} , \mathcal{V} und \mathcal{W} auf deren endlich dimensionale Näherungen \mathcal{S}^G , \mathcal{T}^G , \mathcal{V}^G und \mathcal{W}^G . Dabei entsprechen die Testfunktionen bzw. Variationen den Gewichtsfunktionen. Die Näherungslösung muss folglich die Forderung erfüllen, dass ihre Residuen im integralen Mittel verschwinden. Des Weiteren wurde in dieser Arbeit das Galerkin-Verfahren verwendet, das eine spezielle Form der Methode der gewichteten Residuen ist. Charakteristisch für dieses Verfahren ist die Wahl der Funktionenräume. Das heißt, die gesuchten Lösungsfunktionen \mathbf{u} und ϑ stammen aus demselben Funktionenraum wie ihre zugehörigen Gewichtsfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$. Weitere Einzelheiten können der Arbeit von ELSÄSSER [29] entnommen werden.

Entsprechend der Methode der finiten Elemente erfolgt eine Zerlegung des Gesamtkörpers \mathcal{B} in eine endliche Anzahl n_e von abgeschlossenen Teilkörpern (finite Elemente) \mathcal{B}_i , $i = 1, \dots, n_e$ (siehe zum Beispiel BATHE [4], HUGHES [49], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], SCHWARZ [78] oder REDDY [75]). Die Vereinigung aller \mathcal{B}_i muss wieder den Gesamtkörper \mathcal{B} ergeben. Die Diskretisierung hat im Allgemeinen einen Approximationsfehler in der Geometriebeschreibung zur Folge. Die geometrische Zerlegung erfolgt durch die Auswahl spezieller Punkte, den sogenannten

Knoten. Bei der so erfolgten Diskretisierung des Lösungsgebietes reduziert sich die Anzahl der unbekannten Größen, da anstatt der unendlich vielen materiellen Punkte des Lösungsgebietes nur endlich viele diskrete Knotenpunkte berücksichtigt werden. Diese sind dann die Unbekannten des Problems. Bei den in dieser Arbeit betrachteten finiten Elementen handelt es sich ausschließlich um dreidimensionale Volumenelemente mit acht Eckknoten.

Als Bestandteil des Problems sind Ansatzfunktionen (auch Formfunktionen genannt) für die zu approximierenden Feldgrößen innerhalb der einzelnen Elemente zu wählen. Zwischen den Knoten finden Interpolationen statt, die mittels der Ansatzfunktionen durchgeführt werden und von den verschiedenen Elementtypen abhängen (BATHE [4], HUGHES [49], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], SCHWARZ [78], REDDY [75], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5], WRIGGERS [95], BURNETT [12], BONET & WOOD [8] oder DHATT & TOUZOT [24]). Die Orte der materiellen Punkte im Inneren eines finiten Elementes werden mit Hilfe der Ansatzfunktionen aus den diskreten Knotenkoordinaten interpoliert. Meistens handelt es sich dabei um Polynome eines bestimmten Grades. Im Fall des mikropolaren Kontinuums werden Ansatzfunktionen für die Verschiebung \mathbf{u} und die Rotation $\boldsymbol{\vartheta}$ sowie den Ort \mathbf{x} benötigt. Die Linearkombination dieser Ansatzfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten liefert den gesamten Lösungsansatz. Während der Entwicklung der Finiten-Elemente-Methode wurde eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Interpolation der Feldgrößen und der Geometrie verwendet. Für die meisten Problemstellungen hat sich das isoparametrische Konzept durchgesetzt, bei dem sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen im Elementgebiet durch die gleichen Ansatzfunktionen approximiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden für alle drei Größen (Verschiebung \mathbf{u} , Rotation $\boldsymbol{\vartheta}$ sowie Ort \mathbf{x}) dieselben Formfunktionen gewählt. Bemerkungen zu dieser Wahl der Formfunktionen können den Arbeiten von DIETSCHKE ET AL. [26], VOLK [92] und ELSÄSSER [29] entnommen werden.

Es werden zwei unterschiedliche Knotenmengen eingeführt. Die Menge $\mathcal{M}_{\mathbf{u}}$ berücksichtigt die Knoten mit Verschiebungs- und $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\vartheta}}$ die Knoten mit Rotationsfreiheitsgraden. Je nach Wahl der Ansatzfunktionen für die Verschiebung \mathbf{u} und die Rotation $\boldsymbol{\vartheta}$ können die Mengen, wie in dieser Arbeit, gleich sein. Die Ansatzfunktionen können dann wie folgt dargestellt werden (siehe dazu WRIGGERS [95] und ELSÄSSER [29])

$$\mathbf{u} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}} N_A^{\mathbf{u}} \mathbf{d}_A^{\mathbf{u}} \quad , \quad (9.32)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{\vartheta}}} N_A^{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{d}_A^{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (9.33)$$

und

$$\mathbf{x} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}} N_A^{\mathbf{u}} \mathbf{x}_A \quad . \quad (9.34)$$

Der Summationsindex A bezeichnet die Knoten des diskretisierten Gebietes, die in der jeweiligen Menge enthalten sind. Mit $N_A^{\mathbf{u}}$ ist die vorgegebene Formfunktion eines Knotens für die Interpolation der Verschiebung und des Ortes gegeben. Entsprechend ist $N_A^{\boldsymbol{\vartheta}}$ die vorgegebene Formfunktion eines Knotens für die Interpolation der Rotation. Je nach Wahl des Ansatzes

sind $N_A^{\mathbf{u}}$ und $N_A^{\boldsymbol{\vartheta}}$ identische Polynome oder unterscheiden sich in der Ordnung. Mit $\mathbf{d}_A^{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{d}_A^{\boldsymbol{\vartheta}}$ werden jeweils die zu bestimmenden Knotenpunktsverschiebung und -rotation bezeichnet. Mit Hilfe der beliebigen Koeffizienten $\mathbf{c}_A^{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{c}_A^{\boldsymbol{\vartheta}}$ ergibt sich im Rahmen des Galerkin-Verfahrens der folgende Ansatz für die Gewichtsfunktionen

$$\boldsymbol{\delta u} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}} N_A^{\mathbf{u}} \mathbf{c}_A^{\mathbf{u}} \quad , \quad (9.35)$$

$$\boldsymbol{\delta v} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{\vartheta}}} N_A^{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{c}_A^{\boldsymbol{\vartheta}} \quad . \quad (9.36)$$

Durch Einsetzen dieser Ansätze in die schwache Form ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem. Unter den vielen möglichen Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Probleme wird häufig das Newton-Verfahren ausgewählt, weil es den Vorteil der quadratischen Konvergenz in der Nähe der Lösung besitzt (siehe hierzu auch BATHE [4], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5], BONET & WOOD [8] oder WRIGGERS [95]). Bei Anwendung des Newton-Verfahrens entsteht ein lineares Gleichungssystem, das für beliebig gewählte Koeffizienten der Gewichtsfunktionen erfüllt sein muss. Diese Gleichung kann in Matrizenform umgeschrieben werden

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad . \quad (9.37)$$

Das zu lösende Problem stellt nun eine Matrizengleichung dar, wobei \mathbf{K} die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems ist, während \mathbf{d} und \mathbf{F} den gesuchten Lösungsvektor und den verallgemeinerten Kraftvektor darstellen (siehe auch BATHE [4], HUGHES [49], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], SCHWARZ [78], REDDY [75], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5] und WRIGGERS [95]). Besteht das Finite-Elemente-Modell zum Beispiel aus einem 8-Knoten-Element, so kann die Gleichgewichtsbedingung im dreidimensionalen Fall als ein System von 48 Gleichungen dargestellt werden, d. h. $8 \text{ Knoten} \times 6 \text{ Unbekannte pro Knoten}$.

Die Integration der auftretenden Integrale erfolgt mittels numerischer Integrationsformeln. Das heißt, das Integral wird durch eine Summe approximiert. Dabei wird an n_g ausgewählten Punkten (den Integrations- oder Gauss-Punkten) der Integrand ausgewertet. Die Multiplikation mit Integrationsgewichten w_g liefert dann eine Näherung des Ausgangsintegrals

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(P^i) \quad . \quad (9.38)$$

Die Anzahl n_g und die Position der Integrationspunkte P^i kann der Literatur, etwa BURNETT [12] oder DHATT & TOUZOT [24], entnommen werden. Die Wahl der Integrationspunkte und der Wichtungsfaktoren ist wesentlich für den Integrationsfehler.

9.2 Numerische Lösung des quasistatischen Randwertproblems

9.2.1 Updated-Lagrange-Methode

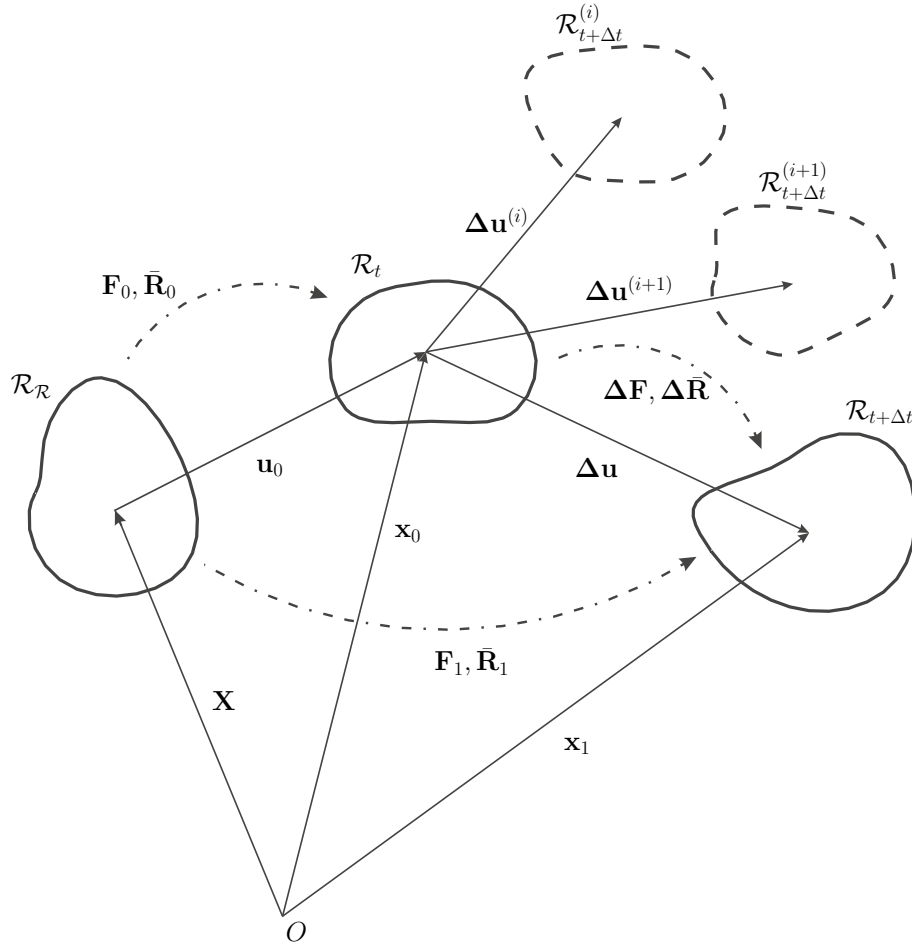


Abbildung 9.1: Inkrementeller Berechnungsablauf bei ABAQUS.

Bei der Lösung eines Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten muss zu jedem Zeitpunkt die mikropolare Impuls- und Drehimpulsbilanz bzw. jeweils die räumlich diskretisierte Form erfüllt sein. Die Randbedingungen können nur inkrementell aufgebracht werden, da es sonst nicht möglich ist, eine Lösung für die entsprechende schwache Form zu finden. Da zusätzlich geschichtsabhängige Effekte bei der Materialantwort auftreten, muss eine zeitliche Diskretisierung erfolgen. Die Materialantwort im Sinne der Bestimmung der Gleichgewichtslage wird dann iterativ von Inkrement zu Inkrement gelöst, welche in ABAQUS über die Zeit t gesteuert wird. Ausgehend von der Lösung des Randwertproblems zu einem Zeitpunkt t wird die Lösung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht (vgl. JANSOHN [50] und die darin zitierte Literatur). Dazu wird der materielle Körper \mathcal{B} betrachtet. Ausgehend von der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R zum

Zeitpunkt $t = 0$ werden dann Gleichgewichtslagen von \mathcal{B} zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, \dots, t, t + \Delta t$ eingenommen (siehe Abbildung 9.1). Befindet sich der Körper \mathcal{B} in einem Gleichgewichtszustand \mathcal{R}_t zum Zeitpunkt t , wird die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ iterativ bestimmt. Dabei nimmt der Körper in jedem Iterationsschritt (i) eine deformierte Nichtgleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ ein. Ist das Gleichgewicht in der (k) -ten Iteration bestimmt, so fällt $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(k)}$ mit der Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ zusammen. Zwischen den benötigten Deformationsgradienten und den mikropolaren Rotationstensoren besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_0 \quad (9.39)$$

und

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \Delta \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}_0 \quad . \quad (9.40)$$

In ABAQUS wird mit Größen in der Konfiguration $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ gearbeitet. Auch die konsistente Linearisierung der nichtlinearen Terme in der mikropolaren Impuls- und Drehimpulsbilanz wird bzgl. $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ vorgenommen. Als Referenzkonfiguration wird während der Iteration die Konfiguration \mathcal{R}_t gewählt, also jeweils die letzte Gleichgewichtskonfiguration. Da die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_t nach jedem Zeitschritt aktualisiert wird, lässt sich dieses Vorgehen als die Updated-Lagrange-Methode bezeichnen (siehe dazu BATHE [4], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [96], [97], CRISFIELD [22], [23], BELYTSCHKO ET AL. [5] oder WRIGGERS [95]).

9.2.2 Konsistente Linearisierung

Das Newton-Verfahren liefert eine verbesserte Näherungslösung durch eine Taylorreihenentwicklung der nichtlinearen Gleichung an der Stelle einer schon gegebenen Näherungslösung. Diese Taylorreihenentwicklung entspricht der Linearisierung der Funktionale (9.26) und (9.27) und kann mittels der Richtungsableitung berechnet werden. Wird die Darstellung (1.25) für Rotationstensoren berücksichtigt, dann lauten die zu linearisierenden Funktionale

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta})), \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (9.41)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta})), \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (9.42)$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden (ähnlich wie in den Gleichungen (9.41), (9.42) und (9.26), (9.27)) die gleichen Funktions- oder Funktionalsymbole verwendet, unabhängig davon, ob $\boldsymbol{\vartheta}$ oder $\exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}))$ als Argument angenommen wird. Anstelle des mikropolaren Verschiebungs- und Rotationsfeldes wird der inkrementelle Verschiebungs- und Rotationsvektor $\Delta \mathbf{u}$ bzw. $\Delta \boldsymbol{\vartheta}$ gesucht. Diese geben die Änderung der Verschiebung und Rotation zwischen alter Gleichgewichtslage \mathcal{R}_t und neuer Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ an. Größen, die sich auf die alte Gleichgewichtslage \mathcal{R}_t beziehen, werden mit dem Index 0 gekennzeichnet und Größen der neuen Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ mit dem Index 1. Unter Berücksichtigung von (9.39) ergibt sich der inkrementelle mikropolare Verschiebungsvektor zu

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \quad (9.43)$$

mit

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{X} \quad , \quad (9.44)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X} \quad . \quad (9.45)$$

Für die mikropolare Rotation gilt mit den Gleichungen (9.40) und (1.25)

$$\exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_1)) = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\vartheta})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_0)) \quad . \quad (9.46)$$

Darin enthalten ist der inkrementelle mikropolare Rotationsvektor $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\vartheta}$. Es ergeben sich die Funktionale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_1, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_1)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\vartheta})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_0)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}_1, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_1)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\vartheta})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}_0)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.48)$$

Die Linearisierung erfolgt für die auf die aktuelle Konfiguration bezogenen Funktionale. Verwendet werden dabei die Größen

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u} \quad , \quad (9.49)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\vartheta}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)} \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}^{(i)} = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\vartheta}^{(i)})) \quad . \quad (9.50)$$

Im Nachfolgenden stellt $X^{(i)}$ die Größe X in der Konfiguration $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ dar.

Zuerst wird das Funktional (9.41) bzw. (9.47) betrachtet. Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\vartheta}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\vartheta}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) \big|_{\lambda=\mu=1} = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial \lambda} \bigg|_{\lambda=\mu=0} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial \mu} \bigg|_{\lambda=\mu=0} = 0 \end{aligned} \quad (9.51)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial \lambda} \bigg|_{\lambda=\mu=0} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial \mu} \bigg|_{\lambda=\mu=0} = -\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) \quad . \quad (9.52)$$

Die rechte Seite stellt das sogenannte Residuum dar, während die linke Seite in mehreren Schritten bestimmt werden muss. Die ersten beiden Integrale in (9.22) sind äußere Lasten und werden,

da sie als unabhängig von der Verschiebung und der Rotation angenommen werden, bei der Linearisierung nicht weiter betrachtet. Folglich muss der Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{T}} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \mathbf{T} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} dv_{t+\Delta t}^{(i)} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{(i)} - \mathbf{M}_{(i)}^T \mathbf{S}_c^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}^{-1} \Big|_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} dV_t\end{aligned}\quad (9.53)$$

linearisiert werden, wobei Gebrauch der Definition (5.88) gemacht wurde. Dabei wird die Notation dV_t bzw. $dv_{t+\Delta t}^{(i)}$ für Volumenelemente in der Konfiguration \mathcal{R}_t bzw. $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ benutzt. Das Ergebnis der Linearisierung lautet:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}} &:= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left(\frac{d}{d\lambda} (\boldsymbol{\Sigma}(\mathcal{U}) - \mathbf{M}_{(i)}^T \mathbf{S}_c(\mathcal{U})) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (\boldsymbol{\Sigma}(\mathcal{U}) - \mathbf{M}_{(i)}^T \mathbf{S}_c(\mathcal{U})) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\mu} (\boldsymbol{\Sigma}(\mathcal{U}) - \mathbf{M}_{(i)}^T \mathbf{S}_c(\mathcal{U})) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \right) dV_t \quad .\end{aligned}\quad (9.54)$$

Hierbei sind die Spannungen $\boldsymbol{\Sigma}$ und Momentenspannungen \mathbf{S}_c als Funktionen von

$$\mathcal{U} := \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \quad (9.55)$$

aufzufassen. Mit den Beziehungen

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \quad , \quad (9.56)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} = -(\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \quad , \quad (9.57)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\mu=0} = \text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \quad , \quad (9.58)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial (\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)})}{\partial \mathbf{X}} \right) \Big|_{\mu=0} = \frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{X}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \quad (9.59)$$

kann die Linearisierung der Spannung durchgeführt werden. Aus der Darstellung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \\ &= \boldsymbol{\Sigma} \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial (\exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right)\end{aligned}\quad (9.60)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \\ &= \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \end{aligned} \quad (9.61)$$

folgen die Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Sigma \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] &, \end{aligned} \quad (9.62)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \Sigma \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] + \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] &, \end{aligned} \quad (9.63)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] &, \end{aligned} \quad (9.64)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] + \\ \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{X}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] &. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Insgesamt lautet das Ergebnis der Linearisierung

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}} = & \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right. \\
 & - \frac{d\mathbf{M}^T}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\mu=0} \mathbf{S}_c \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} - \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & - \Sigma^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \mathbf{M}_{(i)}^T \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & - \frac{d\mathbf{M}^T}{d\mu} \Big|_{\lambda=\mu=0} \mathbf{S}_c \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} - \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & - \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & \left. - \mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right) \frac{dv_{t+\Delta t}^{(i)}}{\det \mathbf{F}^{(i)}} . \tag{9.66}
 \end{aligned}$$

Die Objekte $\frac{d\mathbf{M}^T}{d\lambda}$ und $\frac{d\mathbf{M}^T}{d\mu}$ in Gleichung (9.66) lassen sich mit Hilfe des zweistufigen mikropo-
laren Krümmungstensors

$$\mathbf{M} = \text{axl} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial x^i} \bar{\mathbf{R}}^T \right) \otimes \mathbf{e}_i , \tag{9.67}$$

wie folgt berechnen

$$\frac{d\mathbf{M}^T}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} \frac{\partial \bar{R}_{mo}}{\partial x^k} \bar{R}_{lo} \right) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i , \tag{9.68}$$

$$\frac{d\mathbf{M}^T}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} \frac{\partial \bar{R}_{mo}}{\partial x^k} \bar{R}_{lo} \right) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i . \tag{9.69}$$

Als Nächstes wird das Funktional (9.42) bzw. (9.48) betrachtet. In diesem Fall lautet die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) = \\
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) \Big|_{\lambda=\mu=1} = \\
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \mu} \Big|_{\lambda=\mu=0} = 0
 \end{aligned} \tag{9.70}$$

bzw.

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\mu=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \mu} \right|_{\lambda=\mu=0} = -\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) \quad . \quad (9.71)$$

Die rechte Seite stellt das sogenannte Residuum dar, während die linke Seite wiederum bestimmt werden muss. Das Verfahren entspricht jenem bei (9.41) bzw. (9.47). Die ersten beiden Integrale in (9.23) repräsentieren äußere Lasten und werden, da sie als unabhängig von der Verschiebung und der Rotation angenommen werden, nicht weiter betrachtet. Folglich muss der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left\{ \mathbf{T}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \right\}_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} \\ &\quad - \mathbf{T} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{V} \Big\} dv_{t+\Delta t}^{(i)} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \right. \\ &\quad - \Sigma \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{V} \\ &\quad \left. + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{V} \right\} dV_t \end{aligned} \quad (9.72)$$

linearisiert werden. Dies liefert

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} &:= \left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots) \right|_{\lambda=\mu=0} + \left. \frac{d}{d\mu} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots) \right|_{\lambda=\mu=0} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ \left. \frac{d}{d\lambda} \mathbf{S}_c(\mathcal{U}) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} + \mathbf{S}_c(\mathcal{U}) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \right|_{\lambda=0} \\ &\quad + \left. \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{M}^T \mathbf{S}_c(\mathcal{U})) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} + \left. \frac{d}{d\mu} \mathbf{S}_c(\mathcal{U}) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \\ &\quad + \left. \frac{d}{d\mu} (\mathbf{M}^T \mathbf{S}_c(\mathcal{U})) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} \\ &\quad - \left. \frac{d}{d\lambda} \Sigma(\mathcal{U}) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} - \left. \frac{d}{d\mu} \Sigma(\mathcal{U}) \right|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} \Big\} dV_t \quad , \end{aligned} \quad (9.73)$$

wobei die Variablenmenge \mathcal{U} in Gleichung (9.55) definiert wurde. Insgesamt ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} = & \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} - \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right. \\
 & + \frac{d\mathbf{M}^T}{d\lambda} \bigg|_{\lambda=\mu=0} \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \delta \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(i)}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & + \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \\
 & + \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \\
 & + \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \\
 & + \frac{d\mathbf{M}^T}{d\mu} \bigg|_{\lambda=\mu=0} \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \delta \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(i)}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & + \mathbf{M}_{(i)}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & + \mathbf{M}_{(i)}^T \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{F}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & - \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & - \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial (\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \\
 & - \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \bigg|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \bigg) \frac{dv_{t+\Delta t}^{(i)}}{\det \mathbf{F}^{(i)}} . \tag{9.74}
 \end{aligned}$$

9.2.3 Integration der Materialgleichungen – Operator-Split-Verfahren

Das Materialmodell kann mit einem Operator-Split-Verfahren nach SIMO ET AL. [80], [79] integriert werden. Das gesamte Differentialgleichungssystem wird in mehrere Anteile, sogenannte Operatoren, unterteilt. Die Anfangsbedingungen für das gesamte System sind dann die Anfangsbedingungen für den ersten Operator. Die Lösungen dieses Operators dienen als Anfangsbedingungen für den zweiten Operator und so weiter. Die Lösung des letzten Operators ist schließlich die Lösung des gesamten Differentialgleichungssystems. Diese Vorgehensweise wurde bereits im Rahmen der klassischen Plastizität mit Erfolg angewandt. Repräsentativ seien hier die Arbeiten von HARTMANN [46], JANSOHN [50], LÄMMER [64] und DIEGELE ET AL. [25]

erwähnt. Sie verwenden einen Formalismus, der der hier beschriebenen Theorie sehr nahe steht.

In der vorliegenden Arbeit wird ein zweifacher Operator-Split durchgeführt. Im ersten Operator (elastischer Prädiktor) werden die rein elastischen Anteile der Materialgleichung berücksichtigt, während im zweiten Operator (plastischer Korrektor) die inelastischen Anteile integriert werden. Dies hat den Vorteil, dass nach dem ersten Operator mit Hilfe der Fließbedingung überprüft werden kann, ob eine rein elastische oder eine elastisch-inelastische Belastung vorliegt. Der zweite Operator muss nur im letzteren Fall ausgewertet werden.

Zur Notation: Größen im ersten Operator werden mit einem links hoch gestellten Index I , Größen im zweiten Operator mit einem entsprechenden Index II gekennzeichnet. Außerdem werden Anfangsbedingungen zur Zeit t mit einem rechts tief gestellten Index 0, die Größen am Ende des Inkrements $t + \Delta t$ mit 1 versehen.

Operator I – Elastischer Prädiktor

In Operator I werden nur die Teile in den Differentialgleichungen betrachtet, die unabhängig von \dot{s} sind. So sind z. B. gemäß Gleichung (8.56), (8.3) für ϵ_p, \mathbf{M}_p die Differentialgleichungen

$$\dot{\epsilon}_p = \Omega \epsilon_p + \epsilon_p \mathbf{L} \quad , \quad (9.75)$$

$$\dot{\mathbf{M}}_p = \Omega \mathbf{M}_p - \mathbf{M}_p \Omega^T \quad (9.76)$$

zu lösen (vgl. auch TSAKMAKIS & WILLUWEIT [89], [90]). Mit Hilfe der Beziehungen (9.39) und (9.40) lassen sich ϵ_p, \mathbf{M}_p bestimmen zu

$$^I \epsilon_{p1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) \epsilon_{p0} (\Delta \mathbf{F})^{-1} \quad , \quad (9.77)$$

$$^I \mathbf{M}_{p1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{M}_{p0} (\Delta \bar{\mathbf{R}})^T \quad . \quad (9.78)$$

Daraus folgt für den elastischen Anteil des mikropolaren Verzerrungstensors

$$^I \epsilon_{e1} = \epsilon_1 - ^I \epsilon_{p1} \quad (9.79)$$

und für den elastischen Anteil des Krümmungstensors

$$^I \mathbf{M}_{e1} = \mathbf{M}_1 - ^I \mathbf{M}_{p1} \quad . \quad (9.80)$$

Die mikropolare Spannung $^I \Sigma_1$ und die Momentenspannung $^I \mathbf{S}_{c1}$ können dann aus den Elastizitätsgesetzen (8.52) und (8.53) berechnet werden. Um die Fließbedingung (8.54) zu überprüfen, muss ξ und ξ_c bestimmt werden. Analog lassen sich \mathbf{Y} und \mathbf{Y}_c bestimmen aus

$$^I \overset{\square}{\mathbf{Y}} = \mathbf{0} \quad , \quad (9.81)$$

$$^I \overset{\square}{\mathbf{Y}}_c = \mathbf{0} \quad . \quad (9.82)$$

Die Lösung lautet

$$^I \mathbf{Y}_1 = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) ^I \mathbf{Y}_0 (\Delta \mathbf{F})^{-1} \quad , \quad (9.83)$$

$$^I \mathbf{Y}_{c1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) ^I \mathbf{Y}_{c0} (\Delta \bar{\mathbf{R}})^T \quad . \quad (9.84)$$

Die plastische Bogenlänge s wird in Operator I nicht verändert, so dass

$${}^I s_1 = s_0 \quad (9.85)$$

gilt (s. dazu Kapitel 7.3.2.1). Im Falle einer getrennten Berücksichtigung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung in der isotropen Verfestigung ergibt sich für die skalarwertigen Dehnungen (s. dazu Kapitel 7.3.2.2)

$${}^I s_1^{[1]} = s_0^{[1]} \quad \text{und} \quad {}^I s_1^{[2]} = s_0^{[2]} \quad . \quad (9.86)$$

Zur Notation: Der rechts hoch gestellte Index in eckiger Klammer ist für die Nummerierung der skalarwertigen Variable r zuständig, so dass im Einklang zu der Notation im Kapitel 7.3.2.2 $s^{[1]} \equiv s_1$ und $s^{[2]} \equiv s_2$ zu verstehen ist.

Damit stehen alle Größen zur Verfügung, um die Fließbedingung zu überprüfen und im Falle plastischer Belastung die Lösung in Operator II zu korrigieren. Ist die Belastung rein elastisch, so ist die Lösung aus Operator I die Lösung des gesamten Problems. Es gilt für die Spannung und Momentenspannung

$$\Sigma_1 = {}^I \Sigma_1 \quad , \quad \mathbf{S}_{c_1} = {}^I \mathbf{S}_{c_1} \quad , \quad (9.87)$$

für den Verzerrungs- und Krümmungstensor

$$\epsilon_1 = {}^I \epsilon_{e1} + {}^I \epsilon_{p1} \quad , \quad \mathbf{M}_1 = {}^I \mathbf{M}_{e1} + {}^I \mathbf{M}_{p1} \quad (9.88)$$

und für die Verfestigungsgrößen

$$\mathbf{Z}_1 = {}^I \mathbf{Z}_1 \quad , \quad (9.89)$$

$$\xi_1 = {}^I \xi_1 \quad , \quad \xi_{c_1} = {}^I \xi_{c_1} \quad , \quad (9.90)$$

$$k_1 = {}^I k_1 \quad , \quad s_1 = {}^I s_1 \quad , \quad (9.91)$$

bzw.

$$k_1^{[1]} = {}^I k_1^{[1]} \quad , \quad k_1^{[2]} = {}^I k_1^{[2]} \quad , \quad (9.92)$$

$$s_1^{[1]} = {}^I s_1^{[1]} \quad , \quad s_1^{[2]} = {}^I s_1^{[2]} \quad . \quad (9.93)$$

Operator II – Plastischer Korrektor

In Operator II sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen proportional zu \dot{s} . Im Fall plastischer Belastung wird in Operator II das Anfangswertproblem numerisch mit einem impliziten Euler-Verfahren integriert. Das Algebroidifferentialgleichungssystem ist für das mikropolare Materialmodell bereits angegeben. Mit den im ersten Operator bestimmten Lösungen liegen die Anfangsbedingungen für den zweiten Operator vor. So gilt für die Spannung und Momentenspannung

$${}^{II} \Sigma_0 = {}^I \Sigma_1 \quad , \quad {}^{II} \mathbf{S}_{c_0} = {}^I \mathbf{S}_{c_1} \quad , \quad (9.94)$$

für die Verzerrungs- und Krümmungsmaße

$${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p0} = {}^I\boldsymbol{\epsilon}_{p1} \quad , \quad {}^{II}\mathbf{M}_{p0} = {}^I\mathbf{M}_{p1} \quad , \quad (9.95)$$

$${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{e0} = {}^I\boldsymbol{\epsilon}_{e1} \quad , \quad {}^{II}\mathbf{M}_{e0} = {}^I\mathbf{M}_{e1} \quad (9.96)$$

und für die Verfestigungsvariablen

$${}^{II}\mathbf{Z}_0 = {}^I\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (9.97)$$

$${}^{II}\mathbf{Y}_0 = {}^I\mathbf{Y}_1 \quad , \quad {}^{II}\mathbf{Y}_{c0} = {}^I\mathbf{Y}_{c1} \quad , \quad (9.98)$$

$${}^{II}\boldsymbol{\xi}_0 = {}^I\boldsymbol{\xi}_1 \quad , \quad {}^{II}\boldsymbol{\xi}_{c0} = {}^I\boldsymbol{\xi}_{c1} \quad , \quad (9.99)$$

$${}^{II}k_0 = {}^Ik_1 \quad , \quad {}^{II}s_0 = {}^Is_1 \quad (9.100)$$

bzw.

$${}^{II}k_0^{[1]} = {}^Ik_1^{[1]} \quad , \quad {}^{II}k_0^{[2]} = {}^Ik_1^{[2]} \quad , \quad (9.101)$$

$${}^{II}s_0^{[1]} = {}^Is_1^{[1]} \quad , \quad {}^{II}s_0^{[2]} = {}^Is_1^{[2]} \quad . \quad (9.102)$$

Bei inelastischer Belastung muss das Differentialgleichungssystem für ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1}$, ${}^{II}\mathbf{M}_{p1}$, ${}^{II}\mathbf{Y}_1$, ${}^{II}\mathbf{Y}_{c1}$, ${}^{II}k_1$, ${}^{II}s_1$ (bzw. ${}^{II}s_1^{[1]}$, ${}^{II}s_1^{[2]}$) zusammen mit den algebraischen Beziehungen für ${}^{II}\boldsymbol{\Sigma}_1$, ${}^{II}\mathbf{S}_{c1}$, ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{e1}$, ${}^{II}\mathbf{M}_{e1}$, ${}^{II}\mathbf{Z}_1$, ${}^{II}\boldsymbol{\xi}_1$, ${}^{II}\boldsymbol{\xi}_{c1}$ gelöst werden. Für die gesamte mikropolare Verzerrung und Krümmung ist dann die Lösung durch ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_1 = {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_0$, ${}^{II}\mathbf{M}_1 = {}^{II}\mathbf{M}_0$ gegeben. Die Anwendung des impliziten Euler-Algorithmus liefert zunächst ein nichtlineares Gleichungssystem, das mittels des Newton-Verfahrens gelöst werden kann. Die nichtlinearen Gleichungen werden aus den Beziehungen für die Verzerrung und die Krümmung

$${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1} - {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p0} - \Delta t {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1}^{\square} = \mathbf{0} \quad , \quad (9.103)$$

$${}^{II}\mathbf{M}_{p1} - {}^{II}\mathbf{M}_{p0} - \Delta t {}^{II}\mathbf{M}_{p1}^{\square} = \mathbf{0} \quad (9.104)$$

und für die Verfestigungsvariablen

$${}^{II}\mathbf{Y}_1 - {}^{II}\mathbf{Y}_0 - \Delta t {}^{II}\mathbf{Y}_1^{\square} = \mathbf{0} \quad , \quad (9.105)$$

$${}^{II}\mathbf{Y}_{c1} - {}^{II}\mathbf{Y}_{c0} - \Delta t {}^{II}\mathbf{Y}_{c1}^{\square} = \mathbf{0} \quad , \quad (9.106)$$

$${}^{II}k_1 - {}^{II}k_0 - \Delta t \frac{\dot{s}}{\varphi} (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} ({}^{II}k_1 - r_k)) = 0 \quad , \quad (9.107)$$

$${}^{II}s_1 - {}^{II}s_0 - \Delta t \dot{s} = 0 \quad (9.108)$$

bzw.

$${}^{II}k_1^{[1]} - {}^{II}k_0^{[1]} - \Delta t \frac{\dot{s}}{\varphi} (\gamma_1^{(is)} - \beta_1^{(is)} ({}^{II}k_1^{[1]} - r_k)) = 0 \quad , \quad (9.109)$$

$${}^{II}s_1^{[1]} - {}^{II}s_0^{[1]} - \Delta t \dot{s} = 0 \quad (9.110)$$

und

$${}^{II}k_1^{[2]} - {}^{II}k_0^{[2]} - \Delta t \frac{\dot{s}}{\varphi} (\gamma_2^{(is)} - \beta_2^{(is)} ({}^{II}k_1^{[2]} - r_k)) = 0 \quad , \quad (9.111)$$

$${}^{II}s_1^{[2]} - {}^{II}s_0^{[2]} - \Delta t \dot{s} = 0 \quad (9.112)$$

hergeleitet. Die skalare Variable r_k bezeichnet die Fließgrenze. Die Lösung für das komplette Differentialgleichungssystem ist somit gegeben durch

$$\Sigma_1 = {}^{II}\Sigma_1 \quad , \quad \mathbf{S}_{c1} = {}^{II}\mathbf{S}_{c1} \quad , \quad (9.113)$$

$$\mathbf{Z}_1 = {}^{II}\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (9.114)$$

$$\mathbf{Y}_1 = {}^{II}\mathbf{Y}_1 \quad , \quad \mathbf{Y}_{c1} = {}^{II}\mathbf{Y}_{c1} \quad , \quad (9.115)$$

$$\xi_1 = {}^{II}\xi_1 \quad , \quad \xi_{c1} = {}^{II}\xi_{c1} \quad , \quad (9.116)$$

$$\epsilon_{p1} = {}^{II}\epsilon_{p1} \quad , \quad \mathbf{M}_{p1} = {}^{II}\mathbf{M}_{p1} \quad , \quad (9.117)$$

$$\epsilon_{e1} = {}^{II}\epsilon_{e1} \quad , \quad \mathbf{M}_{e1} = {}^{II}\mathbf{M}_{e1} \quad , \quad (9.118)$$

$$k_1 = {}^{II}k_1 \quad , \quad s_1 = {}^{II}s_1 \quad , \quad (9.119)$$

bzw.

$$k_1^{[1]} = {}^{II}k_1^{[1]} \quad , \quad s_1^{[1]} = {}^{II}s_1^{[1]} \quad , \quad (9.120)$$

$$k_1^{[2]} = {}^{II}k_1^{[2]} \quad , \quad s_1^{[2]} = {}^{II}s_1^{[2]} \quad . \quad (9.121)$$

9.2.4 Bestimmung der konsistenten Tangente

Die analytische Bestimmung der partiellen Ableitungen

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad (9.122)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \quad , \quad (9.123)$$

$$\mathcal{D}_3 = \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \quad , \quad (9.124)$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad (9.125)$$

$$\mathcal{D}_5 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \quad , \quad (9.126)$$

$$\mathcal{D}_6 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \quad (9.127)$$

ist sehr aufwendig und fehleranfällig. Außerdem ist sie sehr unflexibel, was Änderungen an den Materialgleichungen betrifft. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Ableitung mit einem

numerischen Verfahren ermittelt, wie es z. B. in MIEHE [70] vorgestellt wurde. Die numerische Näherung der partiellen Ableitungen \mathcal{D}_1 bis \mathcal{D}_6 wird durch den vorderen Differenzenquotienten ermittelt.

Zur Bildung des Differenzenquotient bei einer skalaren Funktion g , die von einer skalaren Größe x abhängt, wird zum Funktionsargument eine kleine Zahl χ hinzugezählt, d. h. es wird ein kleines Stück in die sogenannte Abstiegsrichtung der Funktion gegangen und dort der Funktionswert bestimmt. Die Ableitung ergibt sich dann aus

$$\frac{\partial g}{\partial x} \approx \frac{g(x + \chi) - g(x)}{\chi} \quad \text{mit} \quad \chi \ll 1 \quad . \quad (9.128)$$

Wird bei einem Tensor zweiter Stufe $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ als Funktion eines weiteren Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} die partielle Ableitung $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{A}$ gesucht, so gilt analog

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{mn}} \approx \frac{\check{G}_{ij}(\check{A}_{kl}^{(mn)}) - G_{ij}(A_{kl})}{\chi} \quad , \quad (9.129)$$

mit dem gestörten Tensor

$$\check{\mathbf{A}}^{(mn)} = \mathbf{A} + \chi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \quad . \quad (9.130)$$

Es wird also jede Komponente von \mathbf{A} gestört und aus diesem $\check{\mathbf{A}}^{(mn)}$ das zugehörige $\check{\mathbf{G}}$ berechnet. Somit ergeben sich für jedes $\check{\mathbf{A}}^{(mn)}$ neun Komponenten von $\check{\mathbf{G}}$, also insgesamt die 81 Komponenten des entstehenden Tensors vierter Stufe. Bei Tensoren dritter Stufe ist die Vorgehensweise analog. Sei ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ als Funktion eines Tensors dritter Stufe \mathcal{A} gegeben und sei die partielle Ableitung $\partial \mathbf{G} / \partial \mathcal{A}$ gesucht, so gilt

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathcal{A}_{mnk}} \approx \frac{\check{G}_{ij}(\check{\mathcal{A}}_{pqr}^{(mnk)}) - G_{ij}(\mathcal{A}_{pqr})}{\chi} \quad , \quad (9.131)$$

mit dem gestörten Tensor

$$\check{\mathcal{A}}^{(mnk)} = \mathcal{A} + \chi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k) \quad . \quad (9.132)$$

Es wird folglich jede Komponente von \mathcal{A} gestört und aus diesem $\check{\mathcal{A}}^{(mnk)}$ das zugehörige $\check{\mathbf{G}}$ berechnet. Für jedes $\check{\mathcal{A}}^{(mnk)}$ ergeben sich 81 Komponenten von $\check{\mathbf{G}}$, also insgesamt die 243 Komponenten des entstehenden Tensors fünfter Stufe.

Die numerischen Näherungen lauten in diesem Fall

$$(\mathcal{D}_1)_{ijmn} \approx \frac{\check{\Sigma}_{ij}(\check{F}_{pq}^{(mn)}) - \Sigma_{ij}(F_{pq})}{\chi} , \quad (9.133)$$

$$(\mathcal{D}_2)_{ijmn} \approx \frac{\check{\Sigma}_{ij}(\check{\bar{R}}_{pq}^{(mn)}) - \Sigma_{ij}(\bar{R}_{pq})}{\chi} , \quad (9.134)$$

$$(\mathcal{D}_3)_{ijmnk} \approx \frac{\check{\Sigma}_{ij}(\check{\bar{R}}_{pq,r}^{(mnk)}) - \Sigma_{ij}(\bar{R}_{pq,r})}{\chi} , \quad (9.135)$$

$$(\mathcal{D}_4)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{F}_{pq}^{(mn)}) - S_{cij}(F_{pq})}{\chi} , \quad (9.136)$$

$$(\mathcal{D}_5)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{\bar{R}}_{pq}^{(mn)}) - S_{cij}(\bar{R}_{pq})}{\chi} , \quad (9.137)$$

$$(\mathcal{D}_6)_{ijmnk} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{\bar{R}}_{pq,r}^{(mnk)}) - S_{cij}(\bar{R}_{pq,r})}{\chi} , \quad (9.138)$$

wobei χ sehr klein sein muss. Bei der Wahl des Inkrements χ in Abstiegsrichtung muss ein Kompromiss eingegangen werden. Wird es zu groß gewählt, ist die errechnete Tangente zu ungenau. Bei zu kleinem χ (in der Größenordnung der Rechnergenauigkeit), können entscheidende Nachkommastellen verloren gehen, was zu falschen Ergebnissen bei der Tangentenberechnung führt. Ein üblicher Wert für χ ist ein Wert mit der halben Anzahl von Nachkommastellen der Maschinengenauigkeit, also

$$\chi = \sqrt{\text{Maschinengenauigkeit}} . \quad (9.139)$$

Ein Nachteil der numerischen Bestimmung der Tangenten ist der größere numerische Aufwand. Neben dem ersten Durchlaufen des Spannungs-Momentenspannungs-Algorithmus zur Ermittlung des gewichteten Cauchyschen Spannungs- und Momentenspannungstensors, muss dieser Programmteil nun zusätzlich mehrmals ausgeführt werden. Der numerisch aufwändigste und damit rechenzeitintensivste Teil der Berechnung ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems im zweiten Operator. Die Effizienz der Tangentenbestimmung kann dadurch gesteigert werden, dass als Startwert des Newton-Verfahrens die Lösung, die aus der Spannungs-Momentenspannungs-Berechnung bekannt ist, verwendet wird. Da sich die jeweils neu bestimmten Verzerrungs- und Krümmungsmaße nur minimal von den ursprünglichen Maßen unterscheiden, weicht auch die berechnete Spannung und Momentenspannung nur minimal von der ursprünglichen Spannung und Momentenspannung ab. Es sind deshalb nur sehr wenige Iterationen im Newton-Verfahren erforderlich, um diese neue Spannung und Momentenspannung zu ermitteln.

9.3 Implementierung in ABAQUS

Das mikropolare (Visko-)Plastizitätsmodell wurde in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert. Aus der Theorie des mikropolaren Kontinuums folgt, dass neben

der Impulsbilanzgleichung eine weitere Gleichgewichtsbedingung (die Drehimpulsbilanz) erfüllt sein muss. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, müssen hierfür eigens definierte Elemente programmiert werden. Durch die Benutzerschnittstelle UEL (siehe ABAQUS Handbuch [2]) ist diese Möglichkeit gegeben. Mittels dieser Schnittstelle ist es möglich, eine entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix und den dazugehörigen Kraftvektor zu bestimmen. Neben diesen beiden Größen können noch weitere Variablen bzw. Steuergrößen übergeben werden. ABAQUS führt anschließend die Assemblierung des Gesamtgleichungssystems durch und berechnet dessen Lösung. ABAQUS dient demnach lediglich als ein stabiler Gleichungslöser.

Zur Berechnung allgemeiner dreidimensionaler Randwertprobleme wurde ein 8-Knoten-Volumenelement programmiert. Um die lineare Interpolation für die Verschiebung und die Rotation zu berücksichtigen, besitzt jeder Knoten eines Elementes drei Verschiebungs- und drei Rotationsfreiheitsgrade. Zusätzlich wird jedem Knoten eine lokale Knotennummer von 1 bis 8 zugewiesen. Die Größe der quadratischen Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors ist dadurch festgelegt. Die Knotenverschiebungen und -rotationen eines Elementes werden in einem Lösungsvektor

$$\bar{\mathbf{d}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}^u \\ \bar{\mathbf{d}}^\vartheta \end{pmatrix} \quad (9.140)$$

angeordnet. Die Elementsteifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}$ kann durch

$$\bar{\mathbf{K}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{uu} & \bar{\mathbf{K}}^{u\vartheta} \\ \bar{\mathbf{K}}^{\vartheta u} & \bar{\mathbf{K}}^{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} \quad (9.141)$$

kompakt ausgedrückt werden. Der Elementkraftvektor $\bar{\mathbf{F}}$ lässt sich darstellen als

$$\bar{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}^u \\ \bar{\mathbf{F}}^\vartheta \end{pmatrix} \quad . \quad (9.142)$$

Die Ausdrücke der einzelnen Einträge in der Elementsteifigkeitsmatrix und im Elementkraftvektor werden aus den bereits hergeleiteten Beziehungen (9.66) und (9.74) gebildet. Die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementkraftvektor werden im ersten Durchlauf für jedes Element des gesamten Finite-Elemente-Modells initialisiert. Daraus bestimmt ABAQUS den Gesamtlösungsvektor \mathbf{d} , aus dem in den darauffolgenden Aufrufen der Elemente die Verzerrungen, Krümmungen, Spannungen und Momentenspannungen an den Integrationspunkten mit den bereits abgeleiteten Beziehungen berechnet wird.

10 Finite-Elemente-Beispiele

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die in dieser Arbeit entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenskaleffekte im Materialverhalten wiederzugeben, so wie sie in der Arbeit von FLECK ET AL. [35] berichtet wurden. Es wird weiter ein qualitativer Vergleich der hier berechneten Ergebnisse mit den experimentellen Resultaten nach FLECK ET AL. [35] und mit den Ergebnissen nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] -[43] gemacht. Zu diesem Zweck wird die Torsion eines Vollzylinders diskutiert.

10.1 Torsion und einachsiger Zug an dünnen Drähten

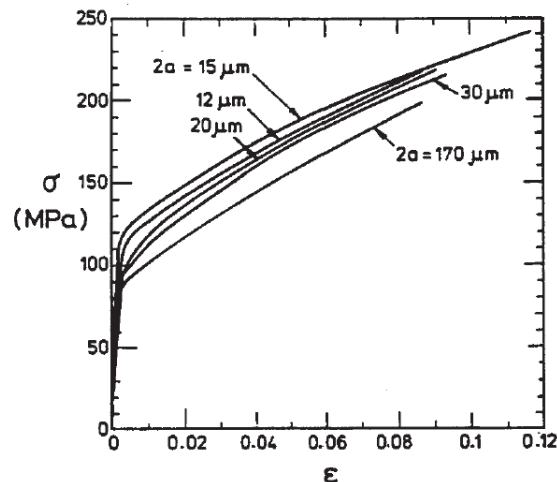


Abbildung 10.1: Eindimensionale (Cauchy-)Spannung σ über die logarithmische Dehnung ϵ für Kupfer-Drähte mit unterschiedlichen Durchmessern (a : Drahradius). Nach FLECK ET AL. [35].

Erste systematische experimentelle Untersuchungen zur Auswirkung von Dehnungsgradienten auf das Verfestigungsverhalten kleinster Proben wurden von FLECK ET AL. bei der Vorstellung einer phänomenologischen Theorie zur Dehnungsgradientenplastizität ("strain gradient plasticity") veröffentlicht [35]. FLECK ET AL. untersuchten dünne Drähte aus polykristallinem Kupfer mit unterschiedlichen Durchmessern (im Bereich von 12 bis 170 μm) sowohl im Zug als auch im Torsionsversuch bei einsinniger Belastung. Im einachsigen Zugversuch konnte nur eine

geringe (von FLECK ET AL. als vernachlässigbar klein angesehene), unsystematische Abhängigkeit des Verformungsverhaltens vom Drahtdurchmesser festgestellt werden (s. Abb. 10.1). Diese Tatsache unterstützt die These, dass im einachsigen Zugversuch Effekte aufgrund von Dehnungsgradienten keinen Einfluß auf das Materialverhalten haben können. Die Torsionsversuche zeigten dagegen deutlich andere Ergebnisse (s. Abb. 10.2). Mit abnehmendem Durchmesser und damit zunehmendem Dehnungsgradient erfolgte eine systematische Zunahme der Torsionsverfestigung. Inwiefern sich die mikrostrukturellen Eigenschaften der Proben (Korngröße, Textur) auf das Ergebnis auswirkten, wurde jedoch nicht eingehend untersucht. Auch das Verhalten bei Entlastung mit anschließender Wiederbelastung (zyklische Belastungen) war nicht Gegenstand der Untersuchungen. Die von FLECK ET AL. durchgeführten Zug- und Torsionsexperimente

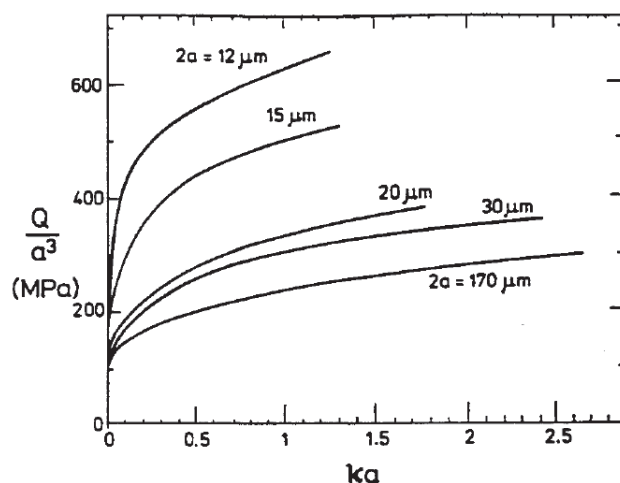


Abbildung 10.2: Das Verhältnis $M/r_a^3 = Q/a^3$ als Funktion der Scherung $\gamma_a = ka$ für Torsionsproben aus Kupfer mit unterschiedlichen Durchmessern. Nach FLECK ET AL. [35]. (Die Bezeichnungen Q, a, k aus FLECK ET AL. [35] entsprechen in dieser Arbeit M, r_a, k .)

konnten bis jetzt mittels einer von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS (s. z.B. [42],[43]) entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie einigermaßen adäquat wiedergegeben werden. Diese enthält ein mikropolares Krümmungsmaß, das einem räumlichen Gradient in der Bezugskonfiguration entspricht. Die in dieser Arbeit entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie enthält ein mikropolares Krümmungsmaß, welches einem räumlichen Gradient in der Momentankonfiguration entspricht. Es stellt sich also die Frage, inwiefern einerseits die hier präsentierte mikropolare Plastizitätstheorie fähig ist, das experimentell beobachtete Verhalten qualitativ wiederzugeben und andererseits, welche Wahl der Variablen zur Formulierung der Theorie die günstigste ist. Der letzte Punkt kann mit einem Vergleich der nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS (s. z.B. [42]) berechneten Ergebnisse mit den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen untersucht werden. Für die in den folgenden Kapiteln präsentierten numerischen Beispiele ist allerdings zuerst die Wahl geeigneter Materialparameter vonnöten.

10.2 Wahl der Materialparameter

Die Bestimmung geeigneter Materialparameter für mikropolare Stoffgesetze ist ein schwieriges Vorhaben und stellt ein nicht gelöstes Problem in der experimentellen Kontinuumsmechanik dar. Bisher wurden nur für wenige Fälle der mikropolaren Elastizität die Materialparameter bestimmt (siehe z.B. LAKES [56]). Dies geschieht in der Regel entweder über die Beobachtung von Größeneffekten oder über die Messung der Ausbreitung von Transversalwellen und die Ermittlung von Dispersionsrelationen, die sich mittels klassischer Modelle nicht beschreiben lassen (siehe ERINGEN [31]). Eine Bestimmung der Materialparameter für das hier angenommene mikropolare Plastizitätsmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Die Materialparameter der nachfolgenden Berechnungen stellen deshalb lediglich angenommene Werte dar und wurden aus GRAMMENOUDES & TSAKMAKIS [42]-[43] übernommen. Vergleiche zu experimentellen Daten können demzufolge nur qualitative Bedeutung haben. Der Einfachheit halber beziehen sich alle durchgeführten Rechnungen auf die geschwindigkeitsunabhängige Plastizität.

Die Materialparameter für das Elastizitätsgesetz und die Fließfunktion sind in Tabelle 10.1 angegeben.

$\mu = 46000 \text{ MPa}$	$\alpha_1 = 1$
$\nu = 0,3$	$\alpha_2 = 0,5$
$\alpha = 3000 \text{ MPa}$	$\alpha_3 = 10000 \text{ mm}^{-2}$
$\beta = 0 \text{ N}$	$\alpha_4 = 10000 \text{ mm}^{-2}$
$\gamma = 0,01 \text{ N}$	
$\delta = 0 \text{ N}$	$k_0 = 70 \text{ MPa}$

Tabelle 10.1: Werte der Materialparameter für das Elastizitätsgesetz, die Fließfunktion und die Fließgrenze.

Für die Verfestigung werden drei Fälle untersucht:

1. Reine isotrope Verfestigung mit getrennter Berücksichtigung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung.

Materialparameter:

$$\beta_1^{(is)} = 16, \gamma_1^{(is)} = 2700 \text{ MPa} \text{ und } \beta_2^{(is)} = 200, \gamma_2^{(is)} = 2700 \text{ MPa}.$$

2. Reine kinematische Verfestigung.

Materialparameter:

$$c_1 = 0 \text{ MPa}, c_2 = 800 \text{ MPa}, c_3 = 100 \text{ MPa}, c_4 = 0 \text{ N}, c_5 = 0,0001 \text{ N}, c_6 = 0 \text{ N}, \\ b_1 = b_2 = 0,002 \text{ MPa}^{-1}, b_{c1} = b_{c2} = 0,002 \text{ mm/N}, \text{ alle übrigen Materialparameter verschwinden.}$$

3. Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung. Einheitliche Erfassung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung in der isotropen Verfestigung.

Materialparameter:

$$\beta^{(is)} = 16, \gamma^{(is)} = 700 \text{ MPa},$$

$$c_1 = 0 \text{ MPa}, c_2 = 600 \text{ MPa}, c_3 = 80 \text{ MPa}, c_4 = 0 \text{ N}, c_5 = 0,0001 \text{ N}, c_6 = 0 \text{ N},$$

$$b_1 = b_2 = 0,0025 \text{ MPa}^{-1}, b_{e1} = b_{e2} = 0,0025 \text{ mm/N}.$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass Rechnungen mit den oben ausgewählten Sätzen von Materialparametern für homogenen einachsigen Zug und Torsion von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS (s. [42] und [43]) durchgeführt wurden. Zum Vergleich der Resultate von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS mit den Ergebnissen der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie verwenden wir die selben Sätze von Materialparametern.

Die Abbildung 10.3 zeigt den Verlauf der Spannung über die Dehnung für eindimensionale monotone Zugbeanspruchungen für die obenstehenden Sätze von Materialparametern. Da der einachsige Zug einen homogenen Deformationsprozeß darstellt, haben Dehnungsgradienten keinen Einfluß auf das Materialverhalten, so dass die Kennlinien für die drei Verfestigungsmodelle in einem großen Bereich nahezu zusammenfallen.

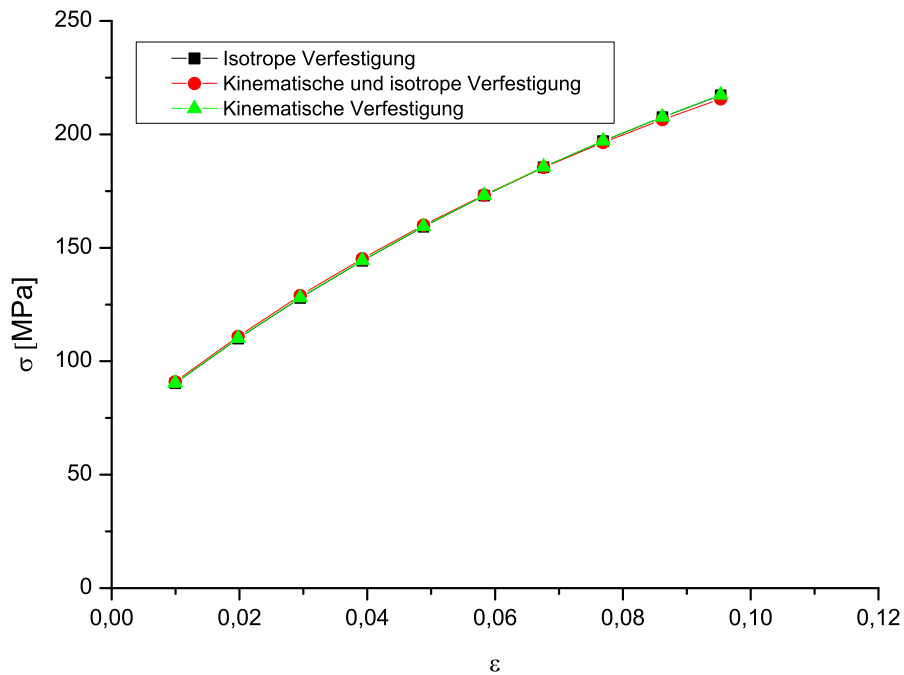


Abbildung 10.3: Verlauf der eindimensionalen Spannung $\sigma (= T_{11})$ als Funktion der logarithmischen Dehnung $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$ für eine Zugprobe (l_0 : Ausgangslänge der Probe, $l = l(t)$: Länge der Probe zur Zeit t).

Im Großen und Ganzen entsprechen die Spannungs-Dehnungskennlinien in Abbildung 10.3 denjenigen für Kupferdrähte in Abbildung 10.1.

10.3 Torsion eines Kreiszylinders

Im Weiteren werden Finite-Elemente-Berechnungen auf Grundlage der hier entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie präsentiert. Als Nächstes wird eine kreiszylindrische Probe unter Torsionsbeanspruchung betrachtet. An ihrem unteren Ende ist die Probe fest eingespannt, während an ihrem oberen Ende eine Verdrehung mit vorgegebenem Drehwinkel erfolgt. Die Länge der Probe bleibt während der Deformation konstant. Diese Situation entspricht dem Fall der einfachen Torsion. In den Abbildungen im folgenden Abschnitt wird auf der vertikalen Achse das durch die dritte Potenz des Außenradius der Probe r_a dividierte Torsionsmoment M aufgetragen. Auf der horizontalen Achse wird die Scherung γ_a am äußeren Rand aufgetragen. Letztere ist durch $\gamma_a = kr_a$ definiert, wobei $k = \Delta\Phi/l_0$ die Drillung darstellt ($\Delta\Phi$: Winkeländerung am oberen Ende der Probe, l_0 : Probenausgangslänge). Wie schon erwähnt, wird als Randbedin-

	Durchmesser [μm]	Höhe [μm]
Probe 1	12	6
Probe 2	15	7,5
Probe 3	20	10
Probe 4	30	15
Probe 5	170	85

Tabelle 10.2: Gewählte Probengeometrien bei der Torsion.

gung das untere Ende der Probe festgehalten, während das obere Ende mit einem vorgegebenen Winkel gedreht wird (Verschiebungsrandbedingungen für das Makrokontinuum). Die innere Rotation sowohl am unteren als auch am oberen Ende der Probe wird der äußeren gleichgesetzt. An der Mantelfläche wird sowohl der Spannungs- als auch der Momentenspannungsvektor gleich Null gesetzt (Kraftrandbedingungen). Die Berechnung des Torsionsmomentes M aus den Finite-Elemente-Ergebnissen erfolgt auf der Basis der Formel

$$M = \int_0^{r_a} T^{<\varphi z>} 2\pi r^2 dr + \int_0^{r_a} T_c^{<zz>} 2\pi r dr \quad . \quad (10.1)$$

Das erste Integral aus (10.1) entspricht dem Beitrag der klassischen Spannung, während das zweite Integral den Anteil aus der Momentenspannung liefert. Die Spannungskomponenten $T^{<\varphi z>}$ und $T_c^{<zz>}$ stellen die physikalischen Komponenten des Spannungstensors \mathbf{T} und des Momentenspannungstensors \mathbf{T}_c dar (siehe auch GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42]). Die gewählten Zylindergeometrien können Tabelle 10.2 entnommen werden. Die Vernetzung erfolgt mit 480 8-Knoten-Volumenelementen.

10.3.1 Diskussion und Interpretation der Ergebnisse

In früheren Arbeiten wurde zuerst ein mikropolares Krümmungsmaß (nicht zu verwechseln mit dem Riemannschen Krümmungstensor) relativ zur Bezugsconfiguration mittels Gradientenbildung eingeführt. Das Krümmungsmaß relativ zur Momentankonfiguration wurde dann mittels

Transformationen festgelegt, die nur die mikropolaren Rotationen enthalten. Auf diese Weise entstand ein Krümmungsmaß relativ zur Momentankonfiguration, das keinem räumlichen Gradient entspricht. In Zusammenhang mit den ausgesuchten Materialgleichungen könnte dies eine ungünstige Wahl der Variablen bedeuten. Vielmehr könnte diese Wahl der Variablen der Grund für einige Unregelmäßigkeiten in den Simulationsergebnissen sein, von denen z.B. in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] berichtet wurde.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Theorie geht von einem Krümmungsmaß in der Momentankonfiguration aus, das einem räumlichen Gradient entspricht. Das korrespondierende Krümmungsmaß relativ zur Bezugskonfiguration wird dann durch reine Rotationen definiert und stellt keinen Gradient mehr dar. Es stellt sich also die Frage, welche Effekte im Materialverhalten durch die neue Kinematik und die unterschiedliche Wahl der Variablen zur Formulierung der Theorie zu beobachten sind. Desweiteren ist es von Interesse zu untersuchen, wie günstig die Formulierung des mikropolaren Krümmungsmasses relativ zur Momentankonfiguration im Vergleich zur Formulierung eines Krümmungsmaßes relativ zur Bezugskonfiguration ist, so wie es z.B. in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [39] der Fall war.

Die isotrope Verfestigung stellt im Folgenden einen weiteren Punkt der Diskussion in diesem Kapitel dar. Die isotrope Verfestigung erfasst in früheren Arbeiten (vgl. [39], [42]) in einheitlicher Weise Beiträge des Deformations- und des Krümmungstensors. Es hat sich herausgestellt, dass die damit beschriebenen Längenskaleneffekte mit den experimentellen Resultaten nicht kompatibel sind (vgl. [42]). Daraufhin schlugen GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS vor, dass die isotrope Verfestigung so modelliert werden kann, dass sie separat Effekte infolge der Deformation und infolge des Krümmungsmaßes berücksichtigt. Somit können die Effekte von höheren Gradienten im Modell der isotropen Verfestigung separat kontrolliert werden. Dadurch konnten Längenskaleneffekte im Materialverhalten (Torsion von dünnen Drähten) adäquater aufgefasst werden (s. dazu GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [43]). In der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie wird sowohl eine einheitliche Erfassung von Verzerrung und mikropolarer Krümmung in der isotropen Verfestigung als auch eine additive Formulierung für die isotrope Verfestigung dargestellt, die jeweils aus reinen Deformationen und reinen Krümmungsanteilen besteht. Als Nächstes folgen die numerischen Voraussagen der Theorie für reine kinematische Verfestigung, reine isotrope Verfestigung sowie kombinierte isotrope und kinematische Verfestigung.

Reine kinematische Verfestigung

In GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] wurde argumentiert, dass das Model der kinematischen Verfestigung mehr Möglichkeiten zur Modellierung von Längenskaleneffekte im Materialverhalten bietet, da es erlaubt, die Effekte herrührend von Termen mit höheren Gradienten separat zu kontrollieren. Hier wurde zur Formulierung des Models der kinematischen Verfestigung dieselbe Struktur aus [42] übernommen (vgl. dazu (8.65) bis (8.70)). Es wurde ausserdem von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS erkannt, dass die Materialparameter α_3 und α_4 in der Fließfunktion ebenso einen Einfluß auf die Modellierung von Längenskaleneffekten in irgendeiner Art und Weise haben können, da sie das Verhalten von Termen mit höheren Gradienten kontrollieren (vgl. dazu den Term mit effektivem Momentenspannungstensor $\mathbf{S}_C - \boldsymbol{\xi}_C$ in Gleichung (2.9) in

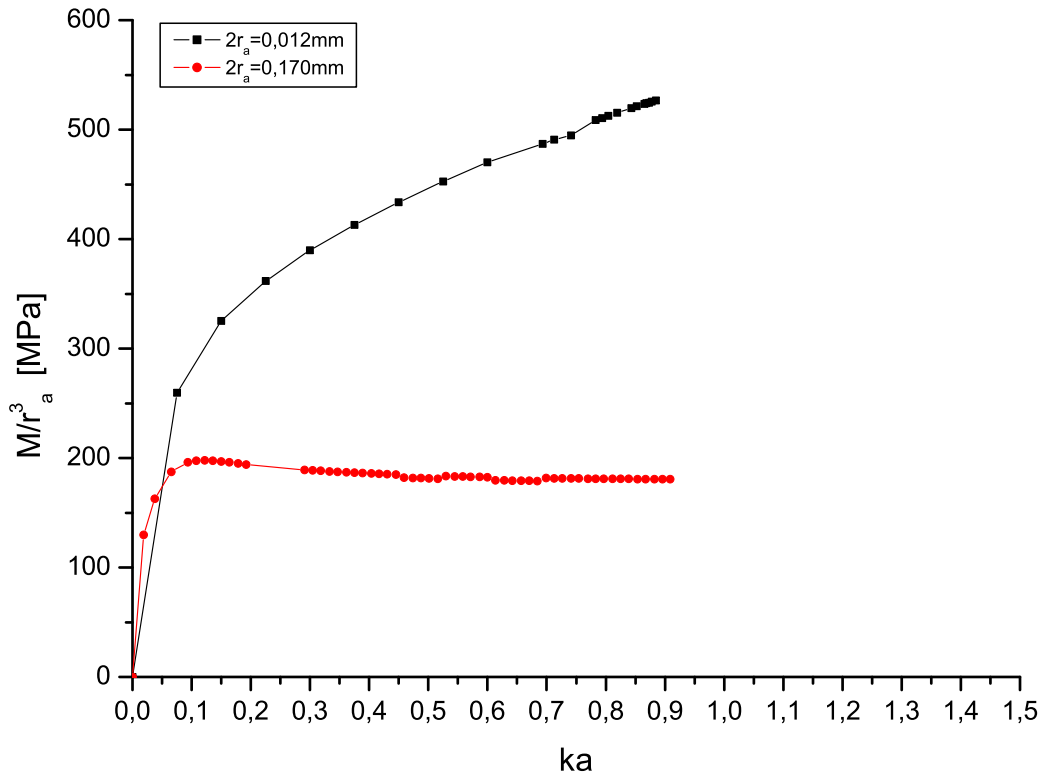


Abbildung 10.4: Modellvoraussagen für reine kinematische Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung. Nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42].

[42]). Im Rahmen dieser Arbeit wurde ebenso dieselbe Struktur aus [42] für die Fließfunktion übernommen (vgl. (8.54)), so dass der einzige Unterschied in Bezug auf die Vorgehensweise nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS lediglich in der Wahl der Variablen zur Formulierung der konstitutiven Theorie, genau genommen des Krümmungsmaßes, besteht.

Die Auswirkung der Wahl der Variablen macht sich bemerkbar, wenn man die Abbildungen 10.4 und 10.5 miteinander vergleicht. In den Abbildungen 10.4 und 10.5 sind für reine kinematische Verfestigung jeweils das γ_a - M/r_a^3 Ergebnis für die kleinste und für die größte Probe aus GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] und das Ergebnis der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie für alle Proben aufgetragen. Als erstes ist zu erkennen, dass die numerischen Ergebnisse, dargestellt in der Abbildung 10.5, die entsprechenden in der Abbildung 10.4 überschätzen. Nichtsdestotrotz kann man eine gute qualitative Übereinstimmung der beiden Verläufe für die kleineren Proben erkennen. Auch ein Vergleich der Abbildung 10.5 mit der Abbildung 10.2 macht klar, dass reine kinematische Verfestigung das reale Materialverhalten bei Torsion relativ adäquat wiedergibt. Es sei weiter angemerkt, dass für die größte Probe ($2r_a = 170\mu\text{m}$) für die Theorie mit rein kinematischer Verfestigung in Abbildung 10.4 die γ_a - M/r_a^3 -Kennlinien Abwei-

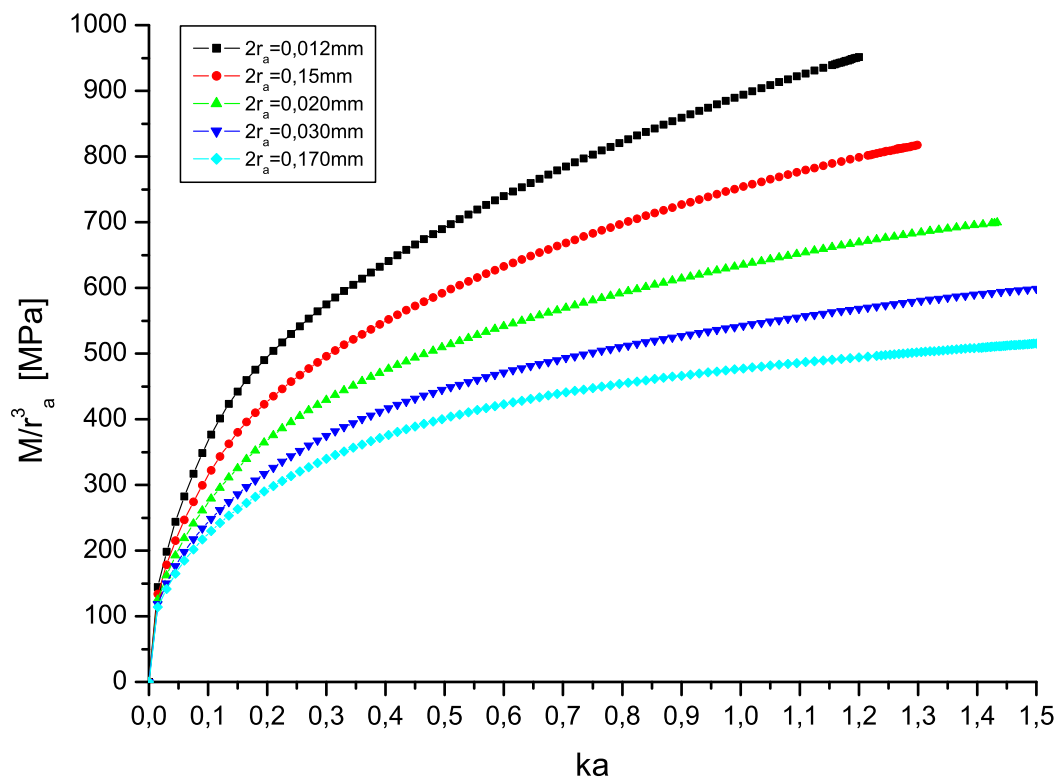


Abbildung 10.5: Modellvoraussagen für reine kinematische Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

chungen vom experimentellen Verhalten aufweisen. Es scheint bei relativ kleiner Scherung eine Entfestigung ("softening") stattzufinden. Die Kennlinie für die größte Probe erreicht nämlich sehr schnell ein Maximum und beginnt dann abzufallen, während die entsprechende Kennlinie in Abbildung 10.2 monoton steigend bleibt. Nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] ist es bis jetzt noch nicht klar, ob dieses Verhalten an einer ungünstigen Wahl der Materialparameter für die Momentenspannungen liegt, oder ob dies ein Effekt der objektiven Zeitableitung in der Evolutionsgleichung des Krümmungsmasses (vgl. (2.18) in [42]) ist. Auf jeden Fall ist in der Abbildung 10.5 deutlich zu erkennen, dass dieser "Entfestigungseffekt" für reine kinematische Verfestigung im Rahmen der in dieser Arbeit entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie nicht mehr präsent ist. An dieser Stelle muss erneut betont werden, dass der Satz der Materialparameter im Model der kinematischen Verfestigung, sowie die Struktur der Fließfunktion identisch aus [42] übernommen wurden. Desweiteren zeigen die Kurven in Abbildung 10.5 einen besseren Verlauf im Vergleich zu denen in der Abbildung 10.4. Es kann daraus geschlossen werden, dass die ersteren adäquater das reale Materialverhalten bei Torsion wiedergeben (vgl. Abb. 10.2). Diese Tatsache ist demzufolge auf die Wahl der Variablen zur Formulierung der

konstitutiven Theorie, genau genommen des Krümmungsmaßes zurückzuführen. Eine konstitutive Theorie mit einem Krümmungsmaß, das einem Gradient in der Momentankonfiguration entspricht, scheint zumindest für den Fall reiner kinematischer Verfestigung besser in der Lage zu sein, Längenskaleneffekte im Materialverhalten zu beschreiben.

Reine isotrope Verfestigung

In den Abbildungen 10.6 und 10.7 sind für reine isotrope Verfestigung jeweils das γ_a - M/r_a^3 Ergebnis aus GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [43] und das Ergebnis der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie für alle Proben aufgetragen. Die in beiden Graphen dargestellten Kurven wurden mit dem Model für die isotrope Verfestigung berechnet, das separat Effekte infolge der Verzerrung und des Krümmungsmasses berücksichtigt (vgl. [43]). Es wurde in beiden Fällen der erste Satz von Materialparametern aus Kapitel 10.2 verwendet.

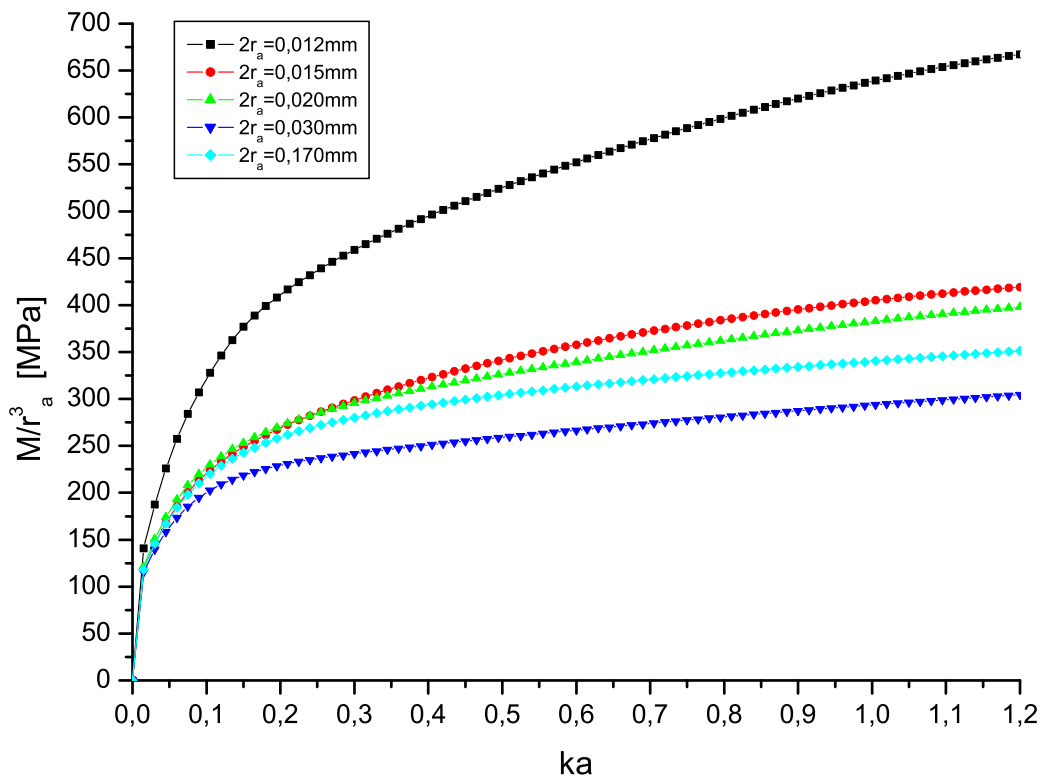


Abbildung 10.6: Modellvoraussagen für reine isotrope Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung. Nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [43].

Ein Vergleich der Abbildung 10.6 mit dem Experiment macht klar, dass während die Voraussage

für die kleinste Probe das reale Materialverhalten relativ gut beschreibt, zeigen die Verläufe der übrigen Proben eine unerwartete Unregelmäßigkeit. Offensichtlich haben die Kurven für die größeren Proben einen kleineren Abstand zueinander im Vergleich zum Experiment. Ausserdem sind Überlappungen der Kurve für die vierte Probe mit der Kurve der fünften Probe sowie der Kurve für die zweite Probe mit der Kurve der dritten Probe für kleine Scherungen zu erkennen. In GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [43] wurde argumentiert, dass diese "Effekte" nicht auf numerischen Instabilitäten zurückzuführen waren. Als mögliche Gründe für dieses Verhalten wurden die gewählten Werte für die Materialparameter (z.B. α_3 , α_4 in der Fließfunktion) oder aber ein Effekt der Fließfunktion an sich und nicht zuletzt ein Effekt der konstitutiven Theorie vermutet.

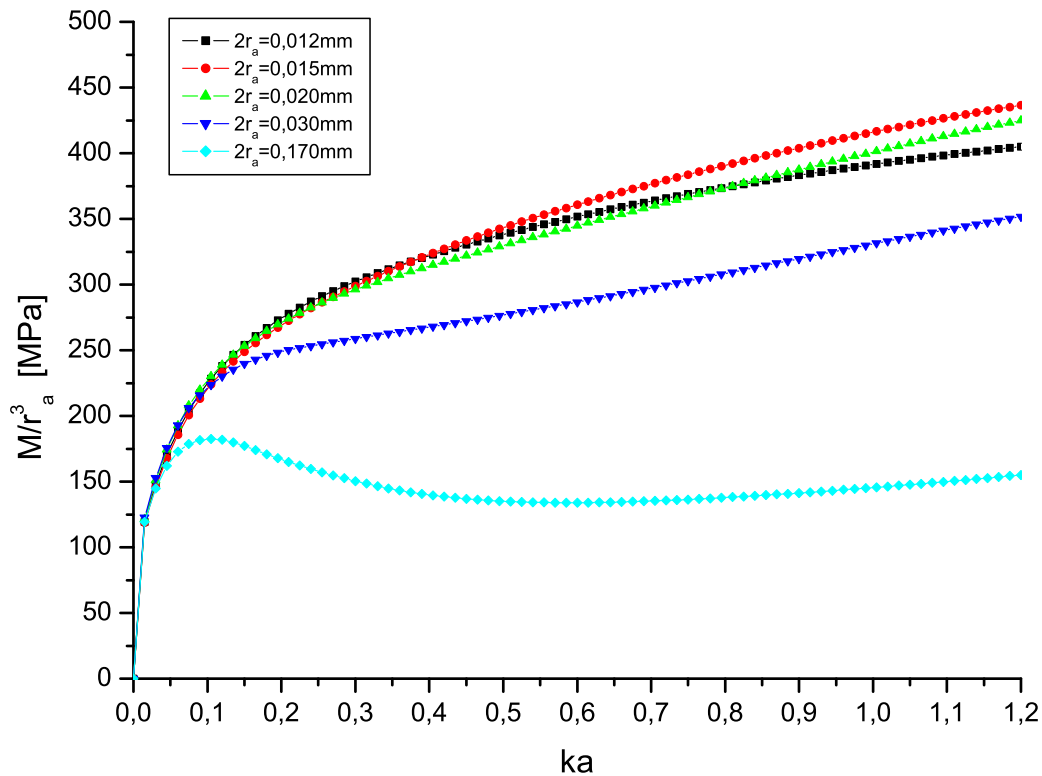


Abbildung 10.7: Modellvoraussagen für reine isotrope Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

Die neue Wahl der Variablen zur Formulierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie macht sich auch im Falle der reinen isotropen Verfestigung deutlich bemerkbar, wie man der Abbildung 10.7 entnehmen kann. Insbesondere sind neue unerwartete Effekte zu beobachten, die sich deutlich aus denen der Abbildung 10.6 unterscheiden. Als erstes ist ein "Entfestigungseffekt" für die größte Probe in einem größeren Bereich zu erkennen. Ausserhalb dieses Bereichs

steigt der M/r_a^3 - Wert mit wachsender Scherung monoton an, wie es auch experimentell zu erwarten ist. Dieser Kurvenverlauf zeigt eine relative Ähnlichkeit zu der Kurve für dieselbe Probe und im selben Scherrungsbereich aus Abbildung 10.4, wobei dort eine fallende Tendenz für den M/r_a^3 - Wert mit wachsender Scherung zu sehen ist. Augenfällig ist allerdings noch, dass die zwei größten Proben nicht mehr miteinander überlappen, so wie es in der Abbildung 10.6 zu sehen ist. Ferner hat man eine Ähnlichkeit im Kurvenverlauf und eine grobe Übereinstimmung der Werte der zweiten und dritten Probe in beiden Abbildungen 10.6 und 10.7. Ein interessanter Kurvenverlauf ist weiter für die erste Probe zu beobachten. Es gibt eine Überlappung mit den Kurven für die zweite und dritte Probe für etwas größere Scherungen. Es ist noch zu untersuchen, ob diese große Abweichung von dem entsprechenden Kurvenverlauf in der Abbildung 10.6 und vom Experiment als Ursache eine ungünstige Wahl der Materialparameter im Modell der isotropen Verfestigung hat, oder aber ein Effekt der Fließfunktion an sich ist. An dieser Stelle ist ausserdem folgendes zu betonen: Inwiefern eine mikropolare Plastizitätstheorie, in der z.B. die Effekte der Spannungen und Momentenspannungen mit separaten Fließfunktionen modelliert werden, in der Lage wäre, in Abhängigkeit auch von den ausgewählten Materialparametern die obengenannten Überlappungen für alle Kurven zu verschieben bzw. sie zum Verschwinden zu bringen, muss noch untersucht werden. Da sich allerdings die Finite Elemente Berechnungen als sehr zeitaufwändig herausstellen, würde eine solche numerische Simulation den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Kombination isotroper und kinematischer Verfestigung

Schließlich wird in den Abbildungen 10.8 und 10.9 das Materialverhalten bei Torsion für den Fall der Kombination isotroper und kinematischer Verfestigung für alle Proben dargestellt. Die Kurven beider Abbildungen wurden mit dem Modell für die isotrope Verfestigung berechnet, das Effekte infolge von Verzerrungen und mikropolaren Krümmungen in einheitlicher Weise erfasst (siehe Kapitel 7.3.2 und GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42]).

Abbildung 10.8 zeigt für die angenommenen Verfestigungsparameter, dass eine Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung durchaus in der Lage ist, die experimentell beobachteten Tendenzen im Materialverhalten für Torsion gut wiederzugeben. Augenfällig in diesen Ergebnissen ist allerdings die Überlappung der Kennlinien für die vierte und fünfte Probe für kleine Scherungen ka . In GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] wurde argumentiert, dass weitere Rechnungen zeigten, dass diese Überlappung auf die kinematische Verfestigung zurückzuführen ist.

Interessanterweise macht sich die neue Wahl der Variablen zur Formulierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie im Falle der Kombination isotroper und kinematischer Verfestigung nicht deutlich bemerkbar, so wie es für den Fall reiner isotroper Verfestigung war. Ein Vergleich der zwei Abbildungen 10.8 und 10.9 macht klar, dass die Kennlinien der Proben in der Abbildung 10.9 diejenigen der Abbildung 10.8 etwas überschätzen. Ausserdem kann man einen steilen monotonen Anstieg im Kurvenverlauf der Abbildung 10.9 erkennen. Nichtsdestotrotz geben diese Ergebnisse qualitativ den experimentellen Verlauf aus Abbildung 10.2 relativ gut wieder und zeigen eine relativ große Ähnlichkeit mit den in der Abbildung 10.8 dargestellten

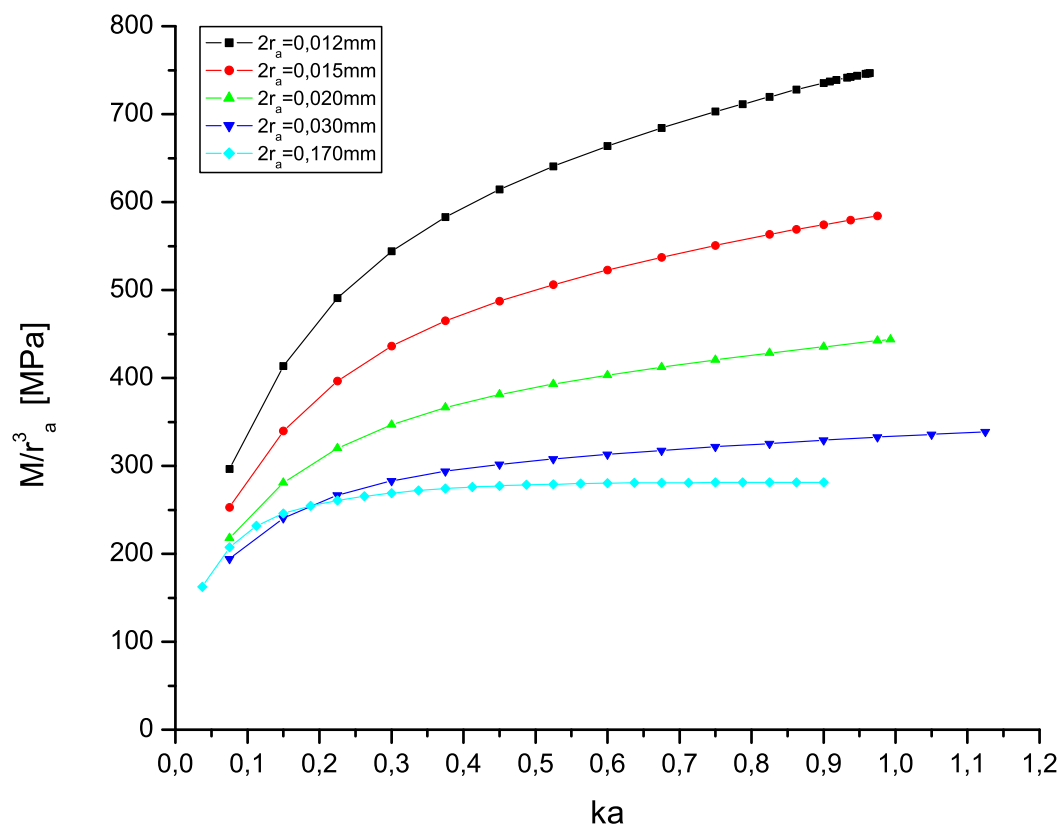


Abbildung 10.8: Modellvoraussagen bei einer Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung. Nach GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42].

Ergebnissen. Augenfällig ist ausserdem, dass keine Überlappung für die vierte und fünfte Probe zu erkennen ist, wie es in Abbildung 10.8 der Fall ist. Man könnte daher daraus schließen, dass in der hier präsentierten mikropolaren Plastizitätstheorie das Krümmungsmaß, welches einem Gradient in der Momentankonfiguration entspricht, tatsächlich eine günstigere Variable zur Modellierung des Materialverhaltens bei Torsion darstellt. Natürlich können die theoretischen Voraussagen verbessert werden, indem alle Materialparameter durch etablierte Optimierungsalgorithmen ermittelt werden. Eine solche Untersuchung ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Zusammenfassend läßt sich sagen, dass die im Rahmen dieser Arbeit dargestellte mikropolare Plastizitätstheorie für den Fall reiner kinematischer Verfestigung und den Fall einer Kombination aus kinematischer und isotropen Verfestigung unterschiedliche Ergebnisse im Vergleich zu der von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie liefert. Für den Fall reiner isotroper Verfestigung sind sogar unerwartete neue Effekte zu beobachten,

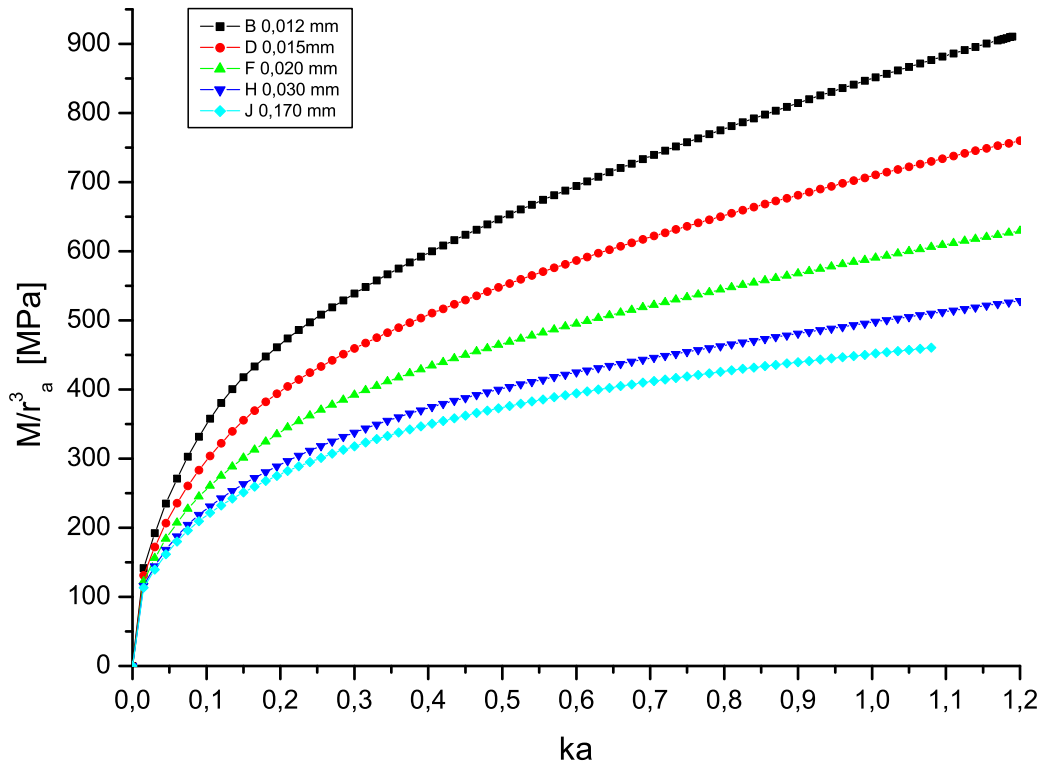


Abbildung 10.9: Modellvoraussagen bei einer Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

die in früheren Arbeiten nicht beobachtet wurden. Es ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit ein optimiertes mikropolares Plastizitätsmodell zur Beschreibung des Materialverhaltens bei Torsion zu präsentieren. Ein solches Vorhaben ist dann weiteren Materialparameterstudien überlassen. Gegenstand dieser Arbeit war lediglich die Untersuchung des Einflusses einer anderen Wahl von Variablen (genau genommen des mikropolaren Krümmungsmasses) zur Formulierung der konstitutiven Theorie auf das Materialverhalten im Vergleich zu einer mikropolaren Plastizitätstheorie, in der das Krümmungsmaß einem Gradient in der Bezugsconfiguration entspricht.

11 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine mikropolare Plastizitätstheorie für finite Deformationen entwickelt, die kinematische und isotrope Verfestigung berücksichtigt. Die Form der Materialgleichungen von GRAMMENODIS & TSAKMAKIS [39] wurde dabei beibehalten. Die isotrope Verfestigung bildet sich additiv aus zwei Anteilen, die jeweils mit der Deformation und dem Krümmungsmaß in Beziehung stehen. Die Modellierung der isotropen Verfestigung erfolgte identisch zu [43]. Charakteristische Eigenschaften der Theorie sind die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und des mikropolaren Rotationstensors in entsprechende elastische und plastische Anteile. Die Theorie enthält ein mikropolares Krümmungsmaß in der Momentankonfiguration, das einem räumlichen Gradient entspricht. Das Krümmungsmaß relativ zur Bezugskonfiguration wird durch reine mikropolare Rotationen definiert und stellt keinen Gradient mehr dar. Auf Grundlage dieser Transformationen werden auch passende objektive Zeitableitungen durch Betrachtung geeignet definierter skalarer Größen definiert. Im Unterschied zu den üblichen Annahmen in der Literatur wird jedem materiellen Punkt ein Mikrokontinuum zugeordnet (s. GRAMMENODIS & TSAKMAKIS [41]). Vom Mikrokontinuum in der Zwischenkonfiguration wird Teleparallelismus (Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors) verlangt. Jedoch braucht das Makrokontinuum keinen Teleparallelismus zu erfüllen. Als praktische Konsequenz erhält man einen Zusammenhang für das Makrokontinuum in der Zwischenkonfiguration, der keinerlei Kompatibilitätsbedingungen zu erfüllen braucht. Das Elastizitätsgesetz wird vom Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet. Außerdem wird für die Definition der Fließfunktion ein Spannungstensor verwendet, der auf dem Mandelschen Spannungstensor im Rahmen der klassischen (nichtpolaren) Plastizität basiert. Das Fließgesetz wird von dem Postulat von Il'iuschin hergeleitet, welches für mikropolare Kontinua angemessen formuliert wird. Die Verfestigungseigenschaften werden in die freie Energie und die Fließfunktion einbezogen, wobei die entsprechenden Evolutionsgleichungen als hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der sogenannten inneren Dissipationsungleichung hergeleitet werden. Auf diese Weise wird für die erarbeiteten mikropolaren Plastizitätsgesetze die thermodynamische Konsistenz gesichert.

Zur numerischen Integration wird die schwache Form der Feldgleichungen linearisiert. Dieser Schritt führt dann zur Bestimmung der sog. konsistenten Tangente. Am Ende jedes Zeitinkrements müssen die Spannungen sowie die Werte für die inneren Variablen berechnet werden. Diese Berechnung besteht aus der Lösung von Algebra-Differentialgleichungen. Es wird ein Operator-Split Verfahren angewandt, das aus einem elastischen Prädiktor und einem plastischen Korrektor besteht. Sind am Ende des Zeitinkrements die Werte aller Variablen bekannt, so kann die konsistente Tangente gebildet werden. In unserem Fall wurde sie mittels numerischer Differentiation approximiert. Dies setzt die Definition geeigneter Störungen für den Deformationsgradient und der mikropolaren Rotation voraus. Insgesamt ergab sich ein System

von Gleichungen, das über die User Element Schnittstelle an das kommerzielle Finite Elemente Programm (ABAQUS) übergeben wurde.

Mittels des in ABAQUS implementierten Elementes wurde die Torsion von fünf vollzylindrischen Proben mit Durchmessern von $12\mu\text{m}$ bis $170\mu\text{m}$ diskutiert. Die berechneten Ergebnisse wurden qualitativ mit experimentellen Resultaten (s. FLECK ET AL. [35]) und mit der von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42], [43] entwickelten Theorie verglichen. Es wurde gezeigt, dass die hier entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenskaleneffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Dabei wurden numerische Berechnungen für drei Verfestigungsfälle durchgeführt.

Für den Fall reiner kinematischer Verfestigung wurde erkannt, dass das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte mikropolare Plastizitätsmodell etwas überschätzte numerische Ergebnisse im Vergleich zur GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] liefert. Nichtsdestotrotz ist eine relativ gute qualitative Übereinstimmung der Verläufe für die kleineren Proben in den numerischen Ergebnissen beider Modelle zu erkennen. Insbesondere ist in unseren Rechnungen, kein "Entfestigungseffekt" bei der größten Probe mehr zu erkennen, was in [42] der Fall war. Ebenso gibt unser mikropolares Plastizitätsmodell mit reiner kinematischen Verfestigung das reale Materialverhalten relativ adäquat wieder, wie ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen nach FLECK ET AL. [35] deutlich macht.

Die neue Wahl der Variablen zur Formulierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorie machte sich auch im Fall der reinen isotropen Verfestigung deutlich bemerkbar, da neue unerwartete Effekte zu beobachten waren, die sich deutlich aus denen, die von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS in [43] diskutiert wurden, unterscheiden. Augenfällig in diesem Zusammenhang war unter anderem der "Entfestigungseffekt" für die größte Probe in einem breiteren Scherungsbereich.

Schließlich wurden numerische Simulationen für den Fall einer Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung durchgeführt. Hier konnte man deutlich erkennen, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte mikropolare Plastizitätsmodell, die experimentell beobachteten Tendenzen im Materialverhalten für Torsion gut wiedergibt. Auch ein Vergleich mit den numerischen Ergebnissen von GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [42] zeigte eine gute qualitative Übereinstimmung der Kurvenverläufe für alle Proben. Es ist an dieser Stelle noch zu betonen, dass keine Überlappung der Kennlinien für die Probe mit einem Durchmesser von $30\mu\text{m}$ und der Probe mit einem Durchmesser von $170\mu\text{m}$ für kleine Scherungen in den Voraussagen unseres Modells mehr zu erkennen waren, was in [42] der Fall war.

Als Hauptergebnis dieser Arbeit lässt sich zum Schluß sagen, dass eine andere Wahl von Variablen (genau genommen des mikropolaren Krümmungsmasses) zur Formulierung der konstitutiven Theorie als in der GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS entwickelten mikropolaren Plastizitätstheorie zu unterschiedlichen Ergebnissen mit interessanten neuen Effekten führt. Inwiefern allerdings diese Unterschiede auf den Einfluß der hier gewählten Variablen, oder der gewählten Werte für die Materialparameter, oder aber der Fließfunktion an sich zurückzuführen sind, muss noch ausführlich untersucht werden. Für eine vollständige Untersuchung sollte noch ein mikropolares Plastizitätsmodell für große Deformationen entwickelt werden, in dem die mikropolaren Krümmungsmassen sowohl in der Bezugs- als auch in der Momentankonfiguration einem Gradient entsprechen. Auch der "Effekt" der Fließfunktion sollte studiert werden, in dem die Effekte

der Spannungen und Momentenspannungen mit separaten Fließfunktionen modelliert werden.

A Zerlegung der kinematischen mikropolaren Größen

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

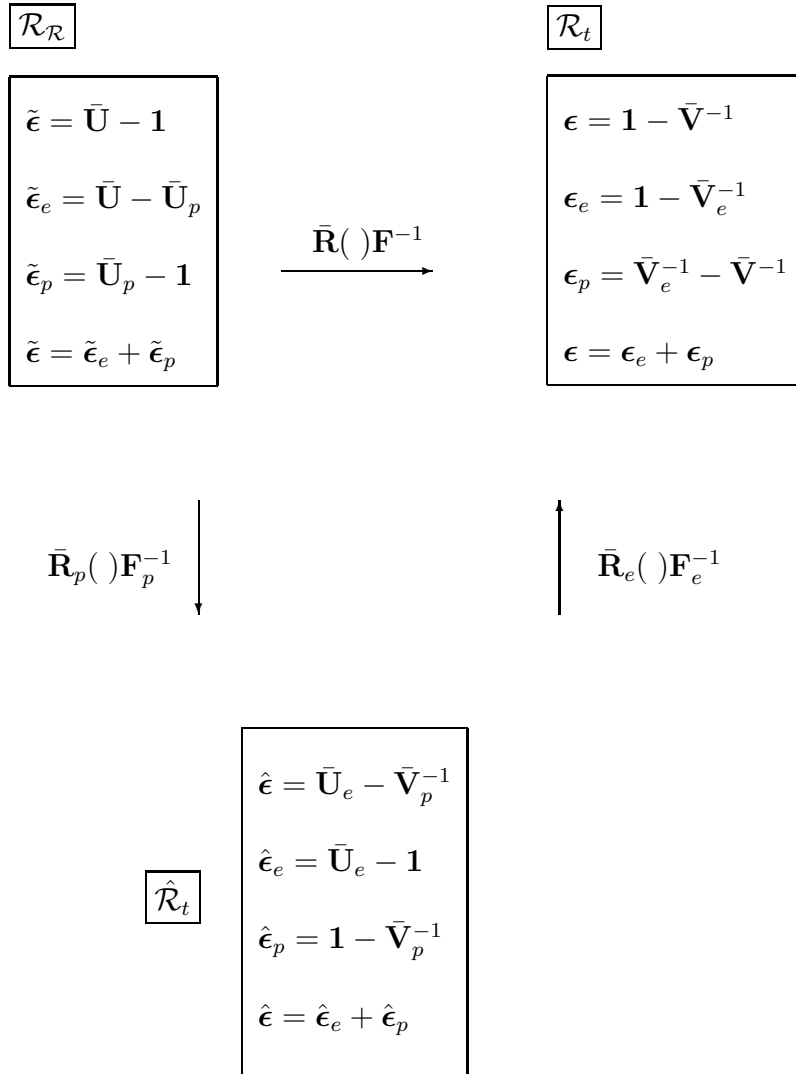


Tabelle A.1: Zerlegung der Verzerrungstensoren.

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}, \hat{\mathbf{\Omega}} = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \mathbf{\Omega} = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\mathbf{\Omega}}_p (\cdot) + (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \mathbf{\Omega} (\cdot) + (\cdot) \mathbf{L} : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

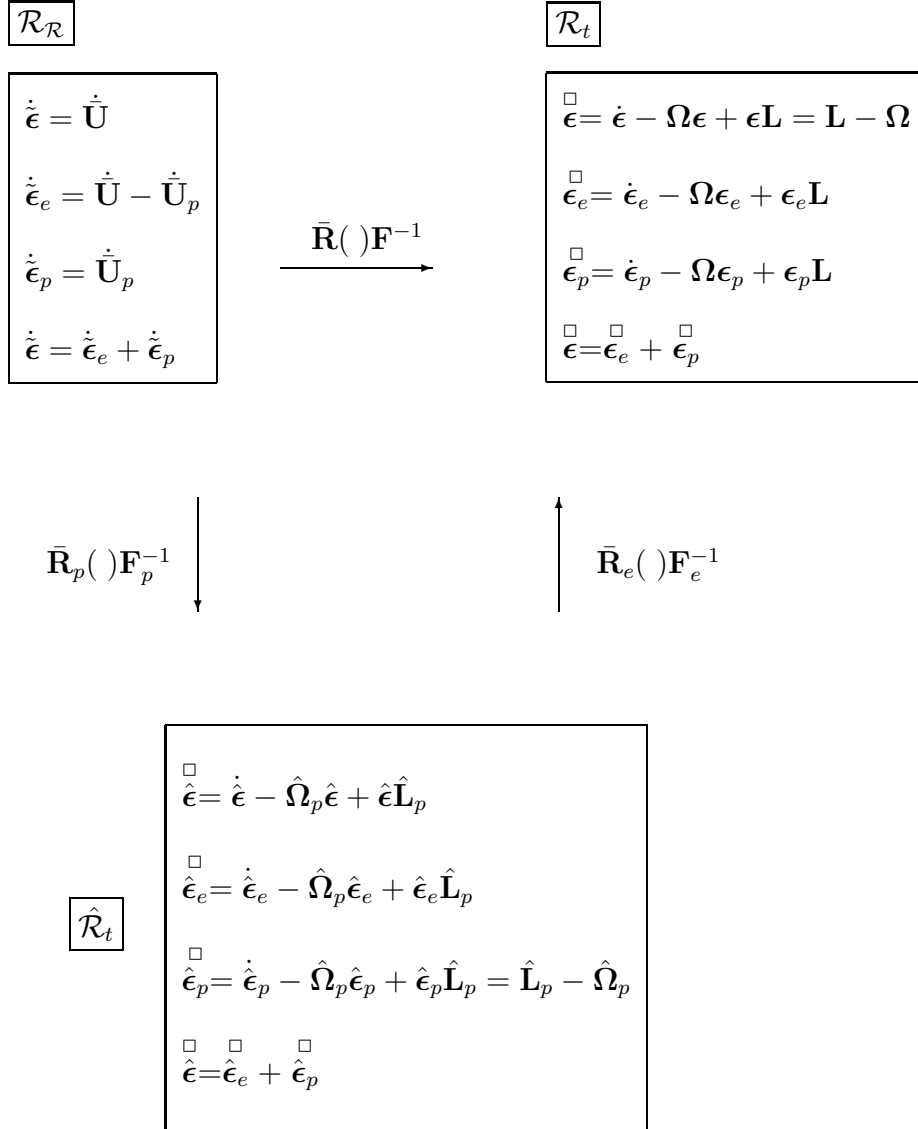


Tabelle A.2: Zerlegung der Verzerrungsraten.

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

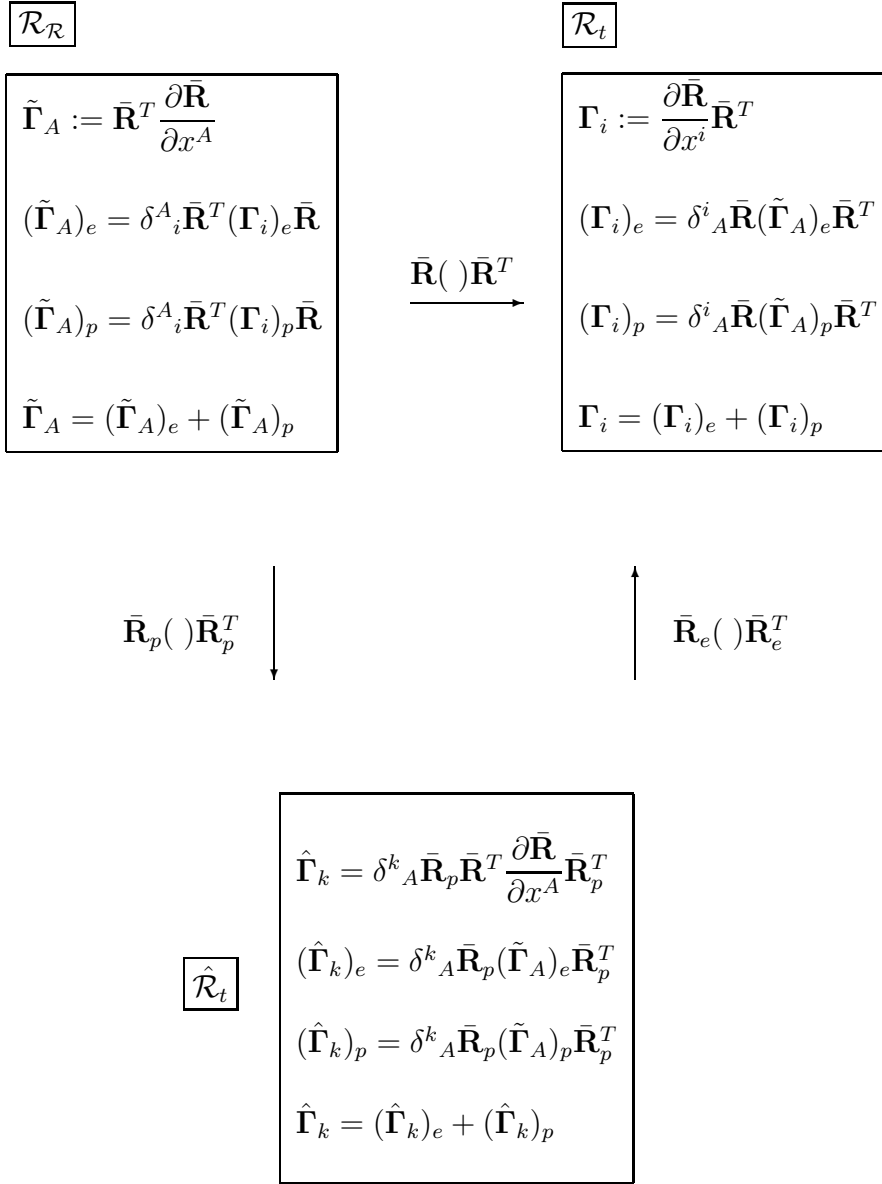


Tabelle A.3: Zerlegung der Krümmungstensenoren $\tilde{\Gamma}_k$, $\hat{\Gamma}_k$, Γ_k .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot) \hat{\Omega}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot) \Omega^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_t}$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_A = \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial x^A} \bar{\mathbf{R}} - \delta^A_i \tilde{\Gamma}_B \delta^B_k L^k_i$$

$$(\tilde{\Gamma}_A)_e^\cdot = \delta^A_i \bar{\mathbf{R}}^T (\Gamma_i)_e^\square \bar{\mathbf{R}}$$

$$(\tilde{\Gamma}_A)_p^\cdot = \delta^A_i \bar{\mathbf{R}}^T (\Gamma_i)_p^\square \bar{\mathbf{R}}$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_A = (\tilde{\Gamma}_A)_e^\cdot + (\tilde{\Gamma}_A)_p^\cdot$$

$$\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T$$

$$\Gamma_i^\square = \dot{\Gamma}_i - \Omega \Gamma_i - \Gamma_i \Omega^T = \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} - \Gamma_k L^k_i$$

$$(\Gamma_i)_e^\square = (\Gamma_i)_e^\cdot - \Omega(\Gamma_i)_e - (\Gamma_i)_e \Omega^T$$

$$(\Gamma_i)_p^\square = (\Gamma_i)_p^\cdot - \Omega(\Gamma_i)_p - (\Gamma_i)_p \Omega^T$$

$$\Gamma_i^\square = (\Gamma_i)_e^\square + (\Gamma_i)_p^\square$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot) \bar{\mathbf{R}}_p^T \downarrow$$

$$\uparrow \bar{\mathbf{R}}_e(\cdot) \bar{\mathbf{R}}_e^T$$

$$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_t}$$

$$\hat{\Gamma}_k^\square = \dot{\hat{\Gamma}}_k - \hat{\Omega}_p \hat{\Gamma}_k - \hat{\Gamma}_k \hat{\Omega}_p^T$$

$$(\hat{\Gamma}_k)_e^\square = (\hat{\Gamma}_k)_e^\cdot - \hat{\Omega}_p (\hat{\Gamma}_k)_e - (\hat{\Gamma}_k)_e \hat{\Omega}_p^T$$

$$(\hat{\Gamma}_k)_p^\square = (\hat{\Gamma}_k)_p^\cdot - \hat{\Omega}_p (\hat{\Gamma}_k)_p - (\hat{\Gamma}_k)_p \hat{\Omega}_p^T$$

$$\hat{\Gamma}_k^\square = (\hat{\Gamma}_k)_e^\square + (\hat{\Gamma}_k)_p^\square$$

Tabelle A.4: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\Gamma}_k$, $\hat{\Gamma}_k$, Γ_k .

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

$\text{axl}(\)$: axialer Vektor von ()

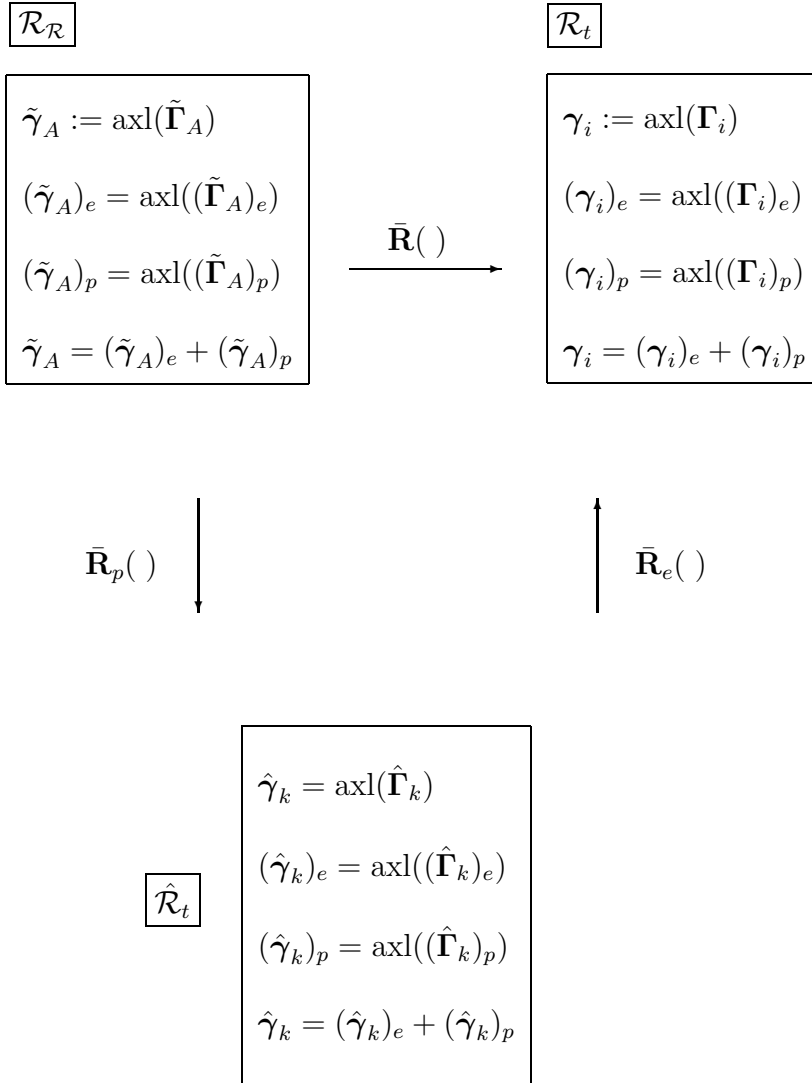


Tabelle A.5: Zerlegung der axialen Vektoren $\tilde{\gamma}_k$, $\hat{\gamma}_k$, γ_k .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$\hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial x^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial x^k} \right) = \text{axl} \left((\hat{\Gamma}_k)_p^\square \right)$$

$$\omega = \text{axl}(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^i} \right) = \text{axl} \left(\Gamma_i^\square \right)$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_t}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}_A &= \text{axl}(\dot{\tilde{\Gamma}}_A) \\ (\tilde{\gamma}_A)_e^\cdot &= \text{axl}((\tilde{\Gamma}_A)_e^\cdot) \\ (\tilde{\gamma}_A)_p^\cdot &= \text{axl}((\tilde{\Gamma}_A)_p^\cdot) \\ \dot{\tilde{\gamma}}_A &= (\tilde{\gamma}_A)_e^\cdot + (\tilde{\gamma}_A)_p^\cdot \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^\square &= \dot{\gamma}_i - \Omega \gamma_i = \text{axl}(\Gamma_i^\square) = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{e}_i \\ (\gamma_i)_e^\square &= (\gamma_i)_e^\cdot - \Omega (\gamma_i)_e = \text{axl}((\Gamma_i)_e^\square) \\ (\gamma_i)_p^\square &= (\gamma_i)_p^\cdot - \Omega (\gamma_i)_p = \text{axl}((\Gamma_i)_p^\square) \\ \gamma_i^\square &= (\gamma_i)_e^\square + (\gamma_i)_p^\square \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot) \downarrow$$

$$\uparrow \bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)$$

$$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_t}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k^\square &= \dot{\hat{\gamma}}_k - \hat{\Omega}_p \hat{\gamma}_k = \text{axl}(\hat{\Gamma}_k^\square) \\ (\hat{\gamma}_k)_e^\square &= (\hat{\gamma}_k)_e^\cdot - \hat{\Omega}_p (\hat{\gamma}_k)_e = \text{axl}((\hat{\Gamma}_k)_e^\square) \\ (\hat{\gamma}_k)_p^\square &= (\hat{\gamma}_k)_p^\cdot - \hat{\Omega}_p (\hat{\gamma}_k)_p = \text{axl}((\hat{\Gamma}_k)_p^\square) \\ \hat{\gamma}_k^\square &= (\hat{\gamma}_k)_e^\square + (\hat{\gamma}_k)_p^\square \end{aligned}$$

Tabelle A.6: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\gamma}_k$, $\hat{\gamma}_k$, γ_k .

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

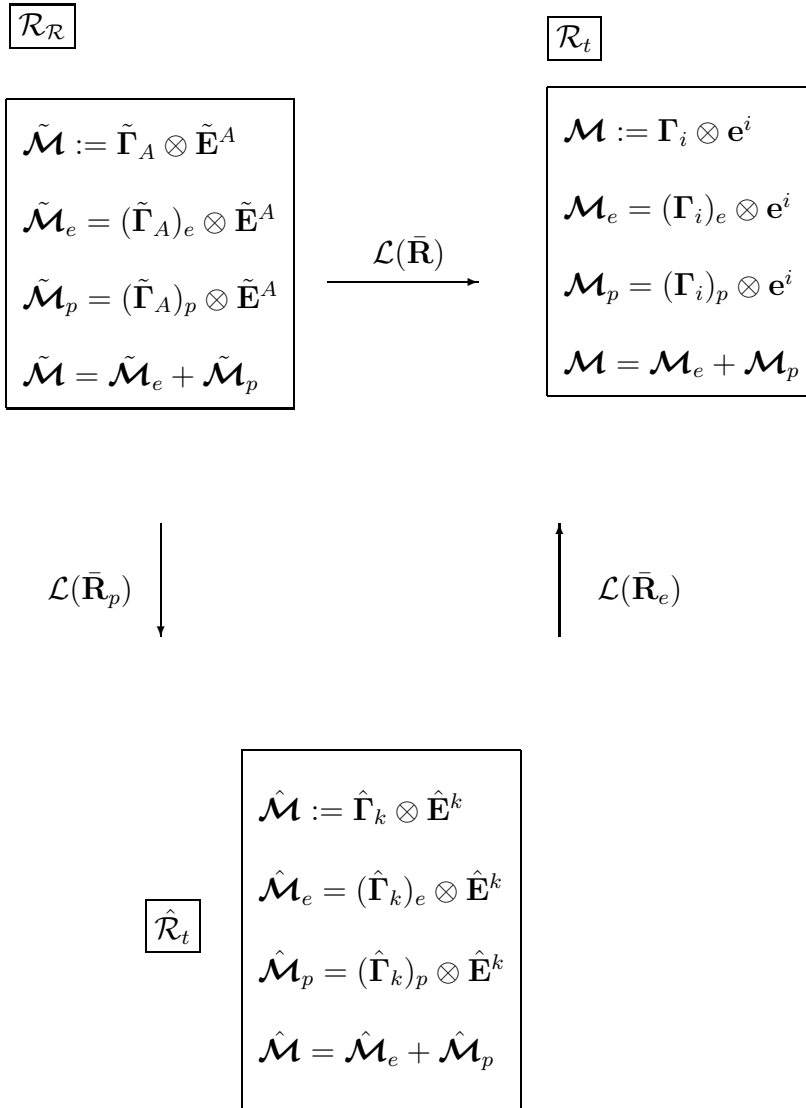


Tabelle A.7: Zerlegung der Krümmungstensoren $\tilde{\mathcal{K}}$, $\hat{\mathcal{K}}$, \mathcal{K} .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t \text{ und } \hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial x^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial x^k} \right) = \text{axl} \left((\hat{\Gamma}_k)_p^\square \right)$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t \text{ und } \omega = \text{axl}(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^i} \right) = \text{axl} \left(\bar{\Gamma}_i^\square \right)$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - \hat{\Omega}_p \diamond (\cdot) - (\cdot) \hat{\Omega}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - \Omega \diamond (\cdot) - (\cdot) \Omega^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$</div>	$\xrightarrow{\mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: 100%;"> \mathcal{R}_t </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: 100%;"> $\dot{\hat{\mathcal{M}}} = \dot{\hat{\Gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathcal{M}}(\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\bar{\mathbf{R}}})$ $\dot{\hat{\mathcal{M}}}_e = (\tilde{\Gamma}_A)_e^\cdot \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathcal{M}}_e(\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\bar{\mathbf{R}}})$ $\dot{\hat{\mathcal{M}}}_p = (\tilde{\Gamma}_A)_p^\cdot \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathcal{M}}_p(\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\bar{\mathbf{R}}})$ $\dot{\hat{\mathcal{M}}} = \dot{\hat{\mathcal{M}}}_e + \dot{\hat{\mathcal{M}}}_p$ </div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: 100%;"> $\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}} - \Omega \hat{\mathcal{M}} - \Omega \diamond \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}} \Omega^T \\ &= \bar{\Gamma}_i^\square \otimes \mathbf{e}^i - \hat{\mathcal{M}} \Omega^T \\ \hat{\mathcal{M}}_e^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}}_e - \Omega \hat{\mathcal{M}}_e - \Omega \diamond \hat{\mathcal{M}}_e - \hat{\mathcal{M}}_e \Omega^T \\ &= (\Gamma_i)_e^\square \otimes \mathbf{e}^i - \hat{\mathcal{M}}_e \Omega^T \\ \hat{\mathcal{M}}_p^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}}_p - \Omega \hat{\mathcal{M}}_p - \Omega \diamond \hat{\mathcal{M}}_p - \hat{\mathcal{M}}_p \Omega^T \\ &= (\Gamma_i)_p^\square \otimes \mathbf{e}^i - \hat{\mathcal{M}}_p \Omega^T \\ \hat{\mathcal{M}}^\square &= \hat{\mathcal{M}}_e^\square + \hat{\mathcal{M}}_p^\square \end{aligned}$ </div>
$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}_p) \downarrow$		$\uparrow \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}_e)$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">$\hat{\mathcal{R}}_t$</div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: 100%;"> $\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{M}} - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_p^T = \hat{\Gamma}_k^\square \otimes \hat{\mathbf{E}}^k \\ \hat{\mathcal{M}}_e^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}}_e - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{M}}_e - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{M}}_e - \hat{\mathcal{M}}_e \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\Gamma}_k)_e^\square \otimes \hat{\mathbf{E}}^k \\ \hat{\mathcal{M}}_p^\square &:= \dot{\hat{\mathcal{M}}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{M}}_p - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{M}}_p - \hat{\mathcal{M}}_p \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\Gamma}_k)_p^\square \otimes \hat{\mathbf{E}}^k \\ \hat{\mathcal{M}}^\square &= \hat{\mathcal{M}}_e^\square + \hat{\mathcal{M}}_p^\square \end{aligned}$ </div>

Tabelle A.8: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\mathcal{K}}$, $\hat{\mathcal{K}}$, \mathcal{K} .

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

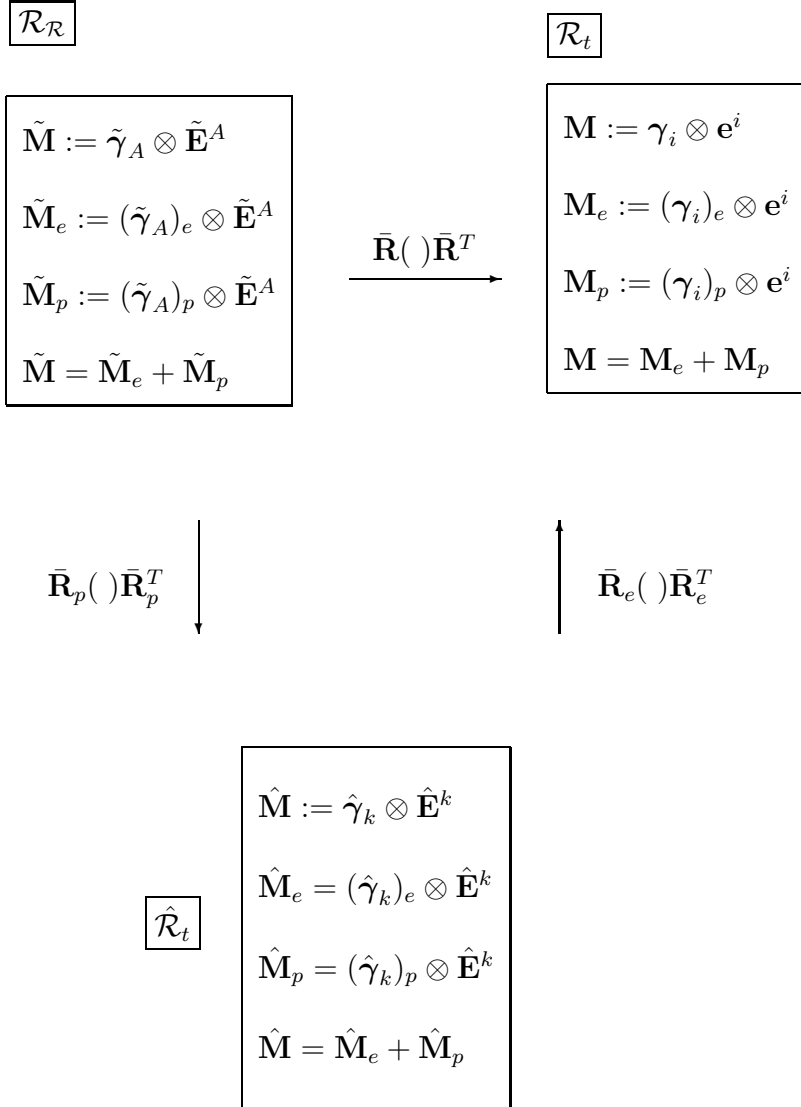


Tabelle A.9: Zerlegung der Krümmungstensoren $\tilde{\mathbf{K}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, \mathbf{K} .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t \text{ und } \hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial x^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial x^k} \right) = \text{axl} \left((\hat{\Gamma}_k)_p^\square \right)$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t \text{ und } \omega = \text{axl}(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^i} \right) = \text{axl} \left(\Gamma_i^\square \right)$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot)^\cdot \hat{\Omega}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot)^\cdot \Omega^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_t}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{M}}} &= \dot{\tilde{\gamma}}_A \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}}^T \Omega \bar{\mathbf{R}} \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}}_e &= (\tilde{\gamma}_A)^\cdot_e \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathbf{M}}_e \bar{\mathbf{R}}^T \Omega \bar{\mathbf{R}} \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}}_p &= (\tilde{\gamma}_A)^\cdot_p \otimes \tilde{\mathbf{E}}^A + \tilde{\mathbf{M}}_p \bar{\mathbf{R}}^T \Omega \bar{\mathbf{R}} \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}} &= \dot{\hat{\mathbf{M}}}_e + \dot{\hat{\mathbf{M}}}_p \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T}$$

$$\begin{aligned} \square \hat{\mathbf{M}} &= \dot{\hat{\mathbf{M}}} - \Omega \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}} \Omega^T = \gamma_i^\square \otimes \mathbf{e}^i + \hat{\mathbf{M}} \Omega \\ \square \hat{\mathbf{M}}_e &= \dot{\hat{\mathbf{M}}}_e - \Omega \hat{\mathbf{M}}_e - \hat{\mathbf{M}}_e \Omega^T = (\gamma_i)^\square_e \otimes \mathbf{e}^i + \hat{\mathbf{M}}_e \Omega \\ \square \hat{\mathbf{M}}_p &= \dot{\hat{\mathbf{M}}}_p - \Omega \hat{\mathbf{M}}_p - \hat{\mathbf{M}}_p \Omega^T = (\gamma_i)^\square_p \otimes \mathbf{e}^i + \hat{\mathbf{M}}_p \Omega \\ \square \hat{\mathbf{M}} &= \square \hat{\mathbf{M}}_e + \square \hat{\mathbf{M}}_p \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot) \bar{\mathbf{R}}_p^T \downarrow$$

$$\uparrow \bar{\mathbf{R}}_e(\cdot) \bar{\mathbf{R}}_e^T$$

$$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_t}$$

$$\begin{aligned} \square \hat{\mathbf{M}} &= \dot{\hat{\mathbf{M}}} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}} \hat{\Omega}_p^T = \hat{\gamma}_k^\square \otimes \hat{\mathbf{E}}^k + \hat{\mathbf{M}} \hat{\Omega} \\ \square \hat{\mathbf{M}}_e &= \dot{\hat{\mathbf{M}}}_e - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{M}}_e - \hat{\mathbf{M}}_e \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\gamma}_k)^\square_e \otimes \hat{\mathbf{E}}^k + \hat{\mathbf{M}}_e \hat{\Omega} \\ \square \hat{\mathbf{M}}_p &= \dot{\hat{\mathbf{M}}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{M}}_p - \hat{\mathbf{M}}_p \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\gamma}_k)^\square_p \otimes \hat{\mathbf{E}}^k + \hat{\mathbf{M}}_p \hat{\Omega} \\ \square \hat{\mathbf{M}} &= \square \hat{\mathbf{M}}_e + \square \hat{\mathbf{M}}_p \end{aligned}$$

Tabelle A.10: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\mathbf{K}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, \mathbf{K} .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \mathbf{\Omega}(\cdot) - (\cdot) \mathbf{L}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$		\mathcal{R}_t
$\tilde{\Sigma}$ $\dot{\tilde{\Sigma}}$	$\xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \mathbf{F}^T}$	$\Sigma := \mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{S}_c$ $\overset{\square}{\Sigma} = \dot{\Sigma} - \mathbf{\Omega} \Sigma - \Sigma \mathbf{L}^T$
$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot) \mathbf{F}_p^T$ \downarrow		\uparrow $\bar{\mathbf{R}}_e(\cdot) \mathbf{F}_e^T$
$\hat{\mathcal{R}}_t$		$\hat{\Sigma} := \bar{\mathbf{R}}_e^T \Sigma \mathbf{F}_e^{T-1}$ $\overset{\square}{\hat{\Sigma}} = \dot{\hat{\Sigma}} - \hat{\Omega}_p \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{L}}_p^T$

Tabelle A.11: Spannungstensor und assoziierte Raten.

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot)\hat{\Omega}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\square = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot)\Omega^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

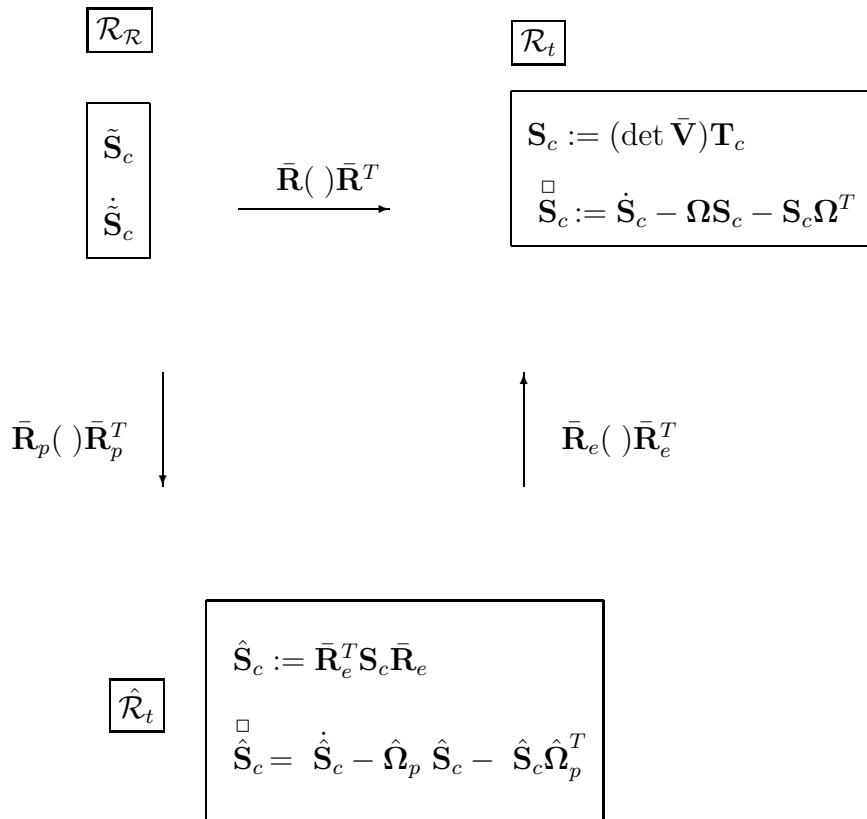


Tabelle A.12: Momentenspannungen und assoziierte Raten.

Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS theory manual, version 6.1.
- [2] ABAQUS user's manual, version 6.1.
- [3] AIFANTIS, E.C.: *On the role of gradients in the localization of deformation and fracture*. International Journal of Engineering Science, 30:1279–1299, 1992.
- [4] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [5] BELYTSCHKO, T., LIN W.K. and B. MORAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley, Chichester, 2000.
- [6] BESDO, D.: *Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums*. PhD thesis, TU Braunschweig, 1974.
- [7] BILBY, B., BULLOUGH, R., SMITH., E.: *Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry*. Acta Proc. R. Soc. Lond. A, 231:263–273, 1955.
- [8] BONET, J. and R.D. WOOD: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] BORST, R. DE: *Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum*. Engineering Computations, 8:317–332, 1991.
- [10] BORST, R. DE: *A generalization of J_2 -flow theory for polar continua*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 103:347–362, 1993.
- [11] BORST, R. DE and H.-B. MÜHLHAUS: *Finite deformation analysis of inelastic materials with micro-structure*. In BESDO D. and E. STEIN (editors): *Finite Inelastic Deformations – Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover, Germany, 1991*, pages 313–322. Springer, 1992.
- [12] BURNETT, D.S.: *Finite element analysis : From concepts to applications*. Addison-Wesley, Reading/Mass., 1988.
- [13] CARMELLI, P. and M.E. GURTIN: *On the characterization of geometrically necessary dislocations in finite plasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49:1539–1568, 2001.

- [14] CASEY, J. and P.M. NAGHDI: *A remark on the use of the decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ in plasticity.* Journal of Applied Mechanics, 47:672–675, 1980.
- [15] CASEY, J. and P.M. NAGHDI: *A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance.* Journal of Applied Mechanics, 48:983–985, 1981.
- [16] CHABOCHE, J.-L.: *Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part I: A thermodynamically consistent formulation.* Journal of Applied Mechanics, 60:813–821, 1993.
- [17] CHABOCHE, J.-L.: *Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part II: Stored energy-comparison between models and experiments.* Journal of Applied Mechanics, 60:822–828, 1993.
- [18] CLAYTON, J.D., MCDOWELL, D.L., BAUMANN, D.J.: *Modelling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity.* Int. J. Plasticity, 22, 210–256, 2006.
- [19] CLEJA-TIGOIU, S.: *Couple stresses and non-Riemannian plastic connection in finite elasto-plasticity.* Z. angew. Math. Phys., 53, 996–1013, 2002.
- [20] COLEMAN, B.D. and M.E. GURTIN: *Thermodynamics with internal state variables.* J. Chem. Phys., 47:597–613, 1967.
- [21] COSSERAT, E. and F. COSSERAT: *Théorie des Corps Déformables.* Herman et fils, Paris, 1909.
- [22] CRISFIELD, M.A.: *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, volume 1: Essentials. John Wiley, Chichester, 1991.
- [23] CRISFIELD, M.A.: *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, volume 2: Advanced Topics. John Wiley, Chichester, 1997.
- [24] DHATT, G. and G. TOUZOT: *The finite element method displayed.* Wiley-Interscience, Chichester, 1985.
- [25] DIEGELE, E., JANSOHN W. and CH. TSAKMAKIS: *Finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules. Part I: Constitutive theory and numerical integration.* Computational Mechanics, 25:1–12, 2000.
- [26] DIETSCHKE, A. and K. WILLAM: *Boundary effects in elasto-plastic Cosserat continua.* International Journal of Solids and Structures, 7:877–893, 1997.
- [27] DIETSCHKE, A., STEINMANN P. and K. WILLAM: *Micropolar elastoplasticity and its role in localization.* International Journal of Plasticity, 9:813–831, 1993.
- [28] DLUZEWSKI, P. *On geometry and continuum thermodynamics of movement of structural defects.* Mech. Materials, 22, 23–41, 1996.
- [29] ELSÄSSER, R.: *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua.* Wissenschaftliche Berichte FZKA 6709, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Um-

welt, 2002.

- [30] ERINGEN, A.C.: *Nonlocal Field Theories*. In LIEBOWITZ, H. (editor): *An Advanced Treatise*, pages 621–729. Academic Press, New York, 1968.
- [31] ERINGEN, A.C.: *Theory of micropolar elasticity*. In LIEBOWITZ, H. (editor): *An Advanced Treatise*, pages 621–729. Academic Press, New York, 1968.
- [32] ERINGEN, A.C.: *Microcontinuum field theories: I. Foundations and Solids*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [33] ERINGEN, A.C. and C.B. KAFADAR: *Polar field theories*. In ERINGEN, A.C. (editor): *Continuum Physics IV*, pages 2–75. Academic Press, New York, 1976.
- [34] ERINGEN, A.C. and E.S. SUHUBI: *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—i*. International Journal of Engineering Sciences, 2:189–203, 1964.
- [35] FLECK, N.A., MULLER, G.M., ASHBY, M.F. and J.W. HUTCHINSON: *Strain gradient plasticity: Theory and experiment*. Acta Metallurgica et Materialia, 42:475–487, 1994.
- [36] FRANKEL, Y.C.: *The Geometry of Physics, second edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [37] FRANTZISKONIS, G.N., KONSTANTINIDIS, A.A., AIFANTIS, E.C. *Scale-dependent constitutive relations and the role of scale on nominal properties*. Eur. J. Mech. A/Solids 20, 925–936, 2001.
- [38] GRAMMENOUDIS, P.: *Mikropolare Plastizität*. Dissertation TU Darmstadt, Fachbereich Mechanik, 2003.
- [39] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: Restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of Il’iushin*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 13:325–363, 2001.
- [40] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Incompatible deformations - plastic intermediate configuration*. ZAMM, 88:403–432, 2008.
- [41] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Micropolar plasticity theories and their classical limits. Part I: Resulting model*. Acta Mechanica, 189:151–175, 2007.
- [42] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Predictions of microtorsional experiments by micropolar plasticity*. Proc. R. Soc. A, 461:189–205, 2005.
- [43] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Isotropic hardening in micropolar plasticity*. Archive of Applied Mechanics, 79:323–334, 2009.
- [44] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Micromorphic continuum Part I: Strain and stress tensors and their associated rates*. Int. J. Non-Linear Mech., 2009, in press.

- [45] GREEN, A.E. and P.M. NAGHDI: *Some remarks on elastic-plastic deformations at finite strains*. International Journal of Engineering Sciences, 9:1219–1229, 1971.
- [46] HARTMANN, S.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität – Ein Finite-Element-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Bericht 1/1993, Universität Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1993.
- [47] HAUPT, P. and TSAKMAKIS, C.: *On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics*. Continuum Mech. Thermodyna. 1, 165–196, 1989.
- [48] HAUPT, P. and TSAKMAKIS, C.: *Stress Tensors associated with deformation Tensors via Duality*. Arch. Mech. 48, 347–384, 1996.
- [49] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [50] JANSOHN, W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 6002, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 1997.
- [51] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1985.
- [52] KONDO, K.: *On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding*. Proceedings Japan National Congress of Applied Mechanics, 2:41–47, 1952.
- [53] KRIEG, R., JORDAN, T. : *Minutes of the sixth LISSAC Project Meeting, Helsinki, Finland, 21-25 June, 2002*. Limit Strains for Severe Accident Conditions (LISSAC), Contact FIKS-CT 1999-00012.
- [54] KRÖNER, E.: *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 4:273–334, 1959.
- [55] KRÖNER, E.: *Continuum theory of defects*. In Physics of defects (ed. R. Balian, M. Klema, J.P. Poirier) Amsterdam, North-Holland 1980.
- [56] LAKES, R.S.: *Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua*. In MÜHLHAUS, H.-B. (editor): *Continuum Models for materials with microstructure*, pages 1–22. Wiley, New York, 1995.
- [57] LAUGWITZ, D.: *Differentialgeometrie*. Teubner, 1968.
- [58] LAZAR, M.: *Dislocation theory as a 3-dimensional translation gauge theory*. Ann. Phys. (Leipzig), 6, 461–473, 2000.
- [59] LAZAR, M.: *An elastoplastic theory of dislocations as a physical field theory with torsion*. J. Phys. A: Math. Gen. 35, 1983–2004, 2002.
- [60] LAZAR, M. and ANASTASSIADIS C.: *The gauge theory of dislocations : Static solutions*

- of screw and edge dislocations.* Philosophical Magazine 89, 199–231, 2009.
- [61] LEE, E.H. and D. LIU: *Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Applications to Plane-Wave Analysis.* J. Appl. Phys. 38, 19–27, 1967.
 - [62] LEE, E.H.: *Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains.* J. Appl. Mech. 36, 1–6, 1969.
 - [63] LE, K.C. and H. STUMPF: *On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations.* Proc. R. Soc. London A, 452, 359–371, 1996.
 - [64] LÄMMER, H.: *Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen.* Wissenschaftliche Berichte FZKA 6053, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 1998.
 - [65] LOVELOCK, D.: *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles.* A Wiley–International Publication, 1975.
 - [66] MALMBERG, T. *Aspects of similitude theory in solid mechanics. Part I: Deformation Behaviour.* Technical Report, FZKA 5657.
 - [67] MARSDEN, J.E. und T.J.R. HUGHES: *Mathematical Foundation of Elasticity.* Dover Publications, INC., 1983.
 - [68] MÜHLHAUS, H.-B. und I. VARDOULAKIS: *The thickness of shear bands in granular materials.* Géotechnique, 37:271–283, 1987.
 - [69] MÜHLHAUS, H.-B. und E.C. AIFANTIS: *The influence of microstructure-induced gradients on the localization of deformation in viscoplastic materials.* Acta Mechanica 89, 217–231, 1991.
 - [70] MIEHE, C.: *Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 134:223–240, 1996.
 - [71] MINAGAWA, S.: *A non-Riemannian geometrical theory of imperfections in Cosserat continuum.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, 31:783–792, 1979 1996.
 - [72] MINDLIN, R.D.: *Micro-structure in linear elasticity.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 16:51–78, 1963.
 - [73] MISNER, C., THORNE, K., WHEELER. J.: *Gravitation.* W.H. Freeman and Company, New York, 1973.
 - [74] NOLL, W. *Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 27:1–32, 1967.
 - [75] REDDY, J.N.: *An introduction to the finite element method.* McGraw-Hill, New York, 2 Auflage, 1993.

- [76] SCHOUTEN, J.: *Ricci-Calculus* Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1954.
- [77] SCHUTZ, B.: *Geometrical methods of mathematical physics* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [78] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente : Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*, Band 47 der Reihe *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik (LAMM)*. Teubner, Stuttgart, 2 Auflage, 1986.
- [79] SIMO, J.C. and T.J.R. HUGHES: *Computational inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics IAM*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [80] SIMO, J.C. and M. ORTIZ: *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:221–245, 1985.
- [81] STEINMANN, P.: *A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity*. International Journal of Solids and Structures, 31:1063–1084, 1994.
- [82] STEINMANN, P.: *An improved FE expansion for micropolar localization analysis*. Communications in Numerical Methods in Engineering 10, 1005-1012.
- [83] STEINMANN, P.: *Views on multiplicative elastoplasticity and the continuum theory of dislocations*. Int. J. Eng. Sci. 34, 1717-1735, 1996.
- [84] STEINMANN, P.: *Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage*. Int. J. Numerical Methods in Engineering 38, 583-606.
- [85] STEINMANN, P. and E. STEIN: *A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua*. Acta Mechanica, 121:215–232, 1997.
- [86] STEINMANN, P. and K. WILLAM: *Localization within the framework of micropolar elastoplasticity*. In O. BRÜLLER, V. MANNL and J. NAJAR (editors): *Advances in Continuum Mechanics*, pages 296–313. Springer, Berlin, 1991.
- [87] TSAKMAKIS, CH.: *Elemente aus der Tensoranalysis und Differentialgeometrie*. Manuskript, 2009.
- [88] TSAKMAKIS, CH.: *On the loading conditions and the decomposition of deformation*. In BOEHLER, J.-P. and A.S. KHAN (editors): *Anisotropy and localization of plastic deformation*, pages 335–356. Elsevier Applied Science, London & New York, 1991.
- [89] TSAKMAKIS, CH. and A. WILLUWEIT: *Time integration algorithms for finite deformation plasticity*. In HUTTER, K. and H. BAASER (editors): *Deformation and Failure of Metallic Continua*, to appear, 2002.
- [90] TSAKMAKIS, CH. and A. WILLUWEIT: *A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations*. International Journal of Non-Linear Mechanics, in press,

2003.

- [91] VARDOULAKIS, I.: *Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory*. Ingenieur-Archiv, 59:106–113, 1989.
- [92] VOLK, W.: *Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie*. Bericht Nr. II-2, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl II, 1999.
- [93] WILLAM, K., DIETSCHKE, A., IORDACHE, M.-M., STEINMANN, P.: *Localization in micropolar continua*. In Continuum Models for Materials with Microstructure, (ed. H.-B. Mühlhaus), Wiley & Sons, 297-339.
- [94] WILLMORE, T.: *Riemannian Geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [95] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [96] ZIENKIEWICZ, O.C. und R.L. TAYLOR: *The finite element method*, Band 1: The Basis. McGraw-Hill Book, London, 4 Auflage, 1989.
- [97] ZIENKIEWICZ, O.C. und R.L. TAYLOR: *The finite element method*, Band 2: Solid Mechanics. McGraw-Hill Book, London, 4 Auflage, 1991.

Lebenslauf

Dimitrios Makridis

Bretzenheimerstr. 11
55128 Mainz

Geburtstag: 08.12.1975
Geburtsort: Athen, Griechenland
Nationalität: griechisch

Schulbildung:

1981 – 1990 Grundschole in Thessaloniki, Griechenland
1990 – 1993 Lyceum (Oberstufe) in Thessaloniki, Griechenland
Juni 1993 Apolytirio (Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife)

Ausbildung:

1995 – 2003 Studium der Physik an der Technischen Universität Darmstadt
Januar 2003 Abschluss: Diplom-Ingenieur an der Technischen Universität Darmstadt
Diplomarbeit: "Untersuchungen zum verstärkten optischen Kerr-Effekt in der isotropen Phase von Azofarbstoff-Flüssigkristallmischungen".
Institut für angewandte Physik, FG Licht- und Teilchenoptik an der Technischen Universität Darmstadt.
Betreuer: Prof. Dr. phil. nat. T. Tschudi

April 2003 – 2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, AG Kontinuumsmechanik (Materialtheorie) an der Technischen Universität Darmstadt.
Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis.

seit 2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie, FG Kontinuumsmechanik an der Technischen Universität Darmstadt.
Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis.

04. Dezember 2009 Promotionsprüfung in Mechanik. Abschlussnote "gut"

